Séminaires & Congrès
10, 2005, p. 39–59

SUR LES PAIRES SPECTRALES DE POLYNÔMES À DEUX VARIABLES

par

Thomas Brélivet

Résumé. — Steenbrink, Schrauwen et Stevens ont montré comment calculer les paires spectrales d'un germe analytique à l'aide de la résolution de la singularité. Ici on considère $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale et on montre comment calculer les paires spectrales associées à la monodromie à l'infini à l'aide de la résolution à l'infini. Une fois ces calculs effectués, on prouve la conjecture de Hertling et Dimca dans le cas d'un polynôme ayant un nœud comme entrelacs à l'infini.

***Abstract* (On the spectral pairs of polynomials of two variables).** — Steenbrink, Schrauwen and Stevens have computed the spectral pairs of an analytic germ in terms of the resolution of the singularity. Here we consider $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ a polynomial function and we show how we can compute the spectral pairs associated to the monodromy at infinity to f from the resolution at infinity. After we prove the conjecture of Hertling and Dimca on the variance of the spectrum for polynomial with knot at infinity.

1. Introduction

Dans la section 2, après avoir donné une définition des paires spectrales (et du spectre) on rappelle des résultats de Steenbrink et de Dimca qui nous serviront par la suite.

Dans la section 3, on donne une formule pour les paires spectrales qui fait intervenir la multiplicité des diviseurs dans la résolution à l'infini. Par la suite, on montre comment on peut calculer les paires spectrales (ou le spectre) à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs à l'infini de la fibre générique (celui-ci détermine la topologie de la fibre générique en tant que courbe lisse plongée dans $\mathbb{C}^2$, voir [**N1**]). On donne aussi une autre description puis on finit par l'exemple du polynôme de Briançon.

Dans la section 4, on s'interesse à la variance du spectre. Cette variance fait l'objet de deux conjectures : conjecture de Hertling dans le cas local (pour les singularités

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14D05, 32S20, 14B05.
Mots clefs. — Polynômes, spectre, conjecture de Hertling-Dimca.

isolées d'hypersurfaces) et conjecture de Dimca dans le cas global (pour les polynômes faiblement modérés).

On appelera ces deux conjectures la conjecture de Hertling-Dimca.

On sait que cette conjecture est vraie pour les singularités de polynômes quasi-homogènes (voir [**H**], [**Di**]) en dimension quelconque et en dimension 2 pour les singularités irréductibles (voir [**S**]) et pour les singularités ou les polynômes non dégénérés par rapport au polygone de Newton (voir [**Bre**]).

Ici, on prouve le cas où le polynôme a sa fibre générale qui a une seule branche l'infini. C'est l'analogue global du cas considéré par Saito. De plus la formule que l'on obtient dans la preuve nous permet de redémontrer en même temps le cas local. Notre résultat principal donne une réponse plus précise, exprimée par une égalité au lieu d'une inégalité, voir le Théorème 5.

2. Définition du spectre

2.1. Structure de Hodge mixte limite. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de variétés algébriques complexes telles que $\dim X = n+1$ pour $n \geqslant 0$ et $\dim S = 1$. On suppose que X et S sont lisses et que $\overline{X}$ et $\overline{S}$ sont des compactifications lisses de S et X respectivement et telles que le prolongement $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{S}$ soit un morphisme.

Soit $B \subset S$ un ensemble fini tel que si on pose $S^* = S \smallsetminus B$ et $X^* = X \smallsetminus f^{-1}(B)$, alors $f^* : X^* \to S^*$ est une fibration topologique localement triviale avec comme fibre générique F.

On pose $\overline{B} = B \cup (\overline{S} \smallsetminus S)$ et $F_s = f^{-1}(s)$ pour chaque $s \in S$. F est homéomorphe à F_s pour chaque $s \in S^*$.

Pour tout $b \in \overline{B}$, il existe une structure de Hodge mixte limite sur la cohomologie $H^*(F, \mathbb{Q})$, voir [**SZ**]. Quand $H^*(F, \mathbb{Q})$ est équipé de cette structure de Hodge Mixte, la structure correspondante sera notée $H^*_{\lim,b}(F, \mathbb{Q})$. S'il n'y a pas ambiguité suivant le contexte et pour simplifier les notations on la notera aussi tout simplement $H^*(F, \mathbb{Q})$. Les groupes $H^*(F_s, \mathbb{Q})$ seront équipés de la structure de Hodge mixte de Deligne, voir [**De0, De1, De2**].

2.2. Paires spectrales et spectre. — Soit (H, T, m) un triplet formé d'une structure de Hodge mixte (SHM) H sur $\mathbb{Q}$, d'un automorphisme d'ordre fini T de H et d'un entier m. On note W la filtration par le poids (filtration croissante) sur H et F la filtration de Hodge (filtration décroissante) sur $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Les paires spectrales du triplet (H, T, m)

$$\operatorname{Spp}(H, T, m) = \sum_{\alpha, w} m_{\alpha,w}(H, T, m)(\alpha, w) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z})}$$

sont données par

$$m_{\alpha,w}(H,T,m) = \begin{cases} \dim \mathrm{Gr}_w^W \mathrm{Gr}_F^{[m-\alpha]} H_\lambda, & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \dim \mathrm{Gr}_{w+1}^W \mathrm{Gr}_F^{[m-\alpha]} H_\lambda, & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

où $\lambda = \exp(-2i\pi\alpha)$, $H_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ et $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le spectre du triplet (H,T,m)

$$\mathrm{Spp}(H,T,m) = \sum_\alpha m_\alpha(H,T,m)(\alpha) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Q})}$$

est donné par la projection sur la première composante des paires spectrales, c'est à dire $m_\alpha(H,T,m) = \sum_{w\in\mathbb{Z}} m_{\alpha,w}$, où $\mathrm{Spp}(H,T,m) = \sum_{\alpha,w} m_{\alpha,w}(H,T,m)(\alpha,w)$.

Dans [**Di**], A. Dimca (suivant C. Sabbah [**Sa2**]) donne une définition similaire. Pour passer de la définition donnée ici à celle de Dimca, il faut appliquer la transformation suivante pour chaque paire :

$$(\alpha,w) \longrightarrow \begin{cases} (\alpha+1,w) & \text{si } \exp(-2i\pi\alpha) \neq 1, \\ (\alpha+1,w+1) & \text{si } \exp(-2i\pi\alpha) = 1. \end{cases}$$

Si l'on prend f comme dans les hypothèses du départ, avec $b \in \overline{B}$, on pose

$$(H,T,m) = (\widetilde{H}^j_{\lim,b}(F,\mathbb{Q}), S_b, j), \ j \geqslant 1,$$

où S_b est la partie semi simple de l'opérateur de monodromie T_b (associé à un tour autour de $b \in \overline{S}$ dans le sens trigonométrique). On note $\mathrm{Spp}^j(f,b)$ les paires spectrales correspondantes et $\mathrm{Sp}^j(f,b)$ le spectre.

On pose de plus

$$\mathrm{Spp}(f,b) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j}\, \mathrm{Spp}^j(f,b),$$

et

$$\mathrm{Sp}(f,b) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j}\, \mathrm{Sp}^j(f,b).$$

Remarque 1. — Historiquement la première définition des paires spectrales a été donnée dans le cas d'une singularité isolée par Steenbrink dans [**Ste**]. La principale difficulté dans cette situation est de définir la structure de Hodge mixte sur la fibre de Milnor (voir [**Ste**] et [**SS**]).

Remarque 2. — Pour une application polynomiale, on sait construire deux structures de Hodge mixtes sur $H^*(F,\mathbb{Q})$: celle définie précédemment et une autre définie à l'aide des D-modules. Dans le cas d'une application polynomiale cohomologiquement modérée (plus généralement faiblement modérée voir section 3.2, et [**NS**]) on sait que les paires spectrales associées à ces deux structures coïncident. De plus la deuxième définition nous permet de montrer que l'on a comme dans le cas local l'inclusion du support du spectre dans l'intervalle $]-1,n[$ et qu'il est symétrique par rapport à $\frac{n-1}{2}$ (voir [**Sa1**] section 5 et [**Sa2**]).

2.3. Construction de Steenbrink. — Soient $b \in \overline{B}$ fixé, $\mathbb{D}$ un petit disque autour de b (on peut supposer que c'est le disque unité), $\overline{N} = \overline{f}^{-1}(\mathbb{D})$ et $N^* = f^{-1}(\mathbb{D}^* \cap S)$. On suppose que $\overline{N} \smallsetminus N^*$ est un diviseur à croisements normaux et égal à $E_1 \cup \cdots \cup E_m$. Notons e_i la multiplicité de E_i et $e =$ ppcm $(e_0, \ldots, e_m)$.

Il est aussi utile de décomposer cette réunion sous la forme :

$$\overline{N} \smallsetminus N^* = \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_{\mathrm{dic}},$$

où

– $\mathcal{E}_b$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend la valeur b,

– $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ est surjective. Par définition, un dicritique est une composante de $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$.

On notera aussi

$$\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b} = \mathcal{E}_{\mathrm{dic}} \cap \overline{f}^{-1}(b).$$

On peut alors faire la construction suivante, cas particulier de celle de Steenbrink dans [**Ste**]. Soit $\widetilde{\mathbb{D}}$ une autre copie du disque unité et $\sigma : \widetilde{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$, $\sigma(t) = t^e$.

Notons $\widetilde{N}$ la normalisation de $N \times_{\mathbb{D}} \widetilde{\mathbb{D}}$ et soit $\pi : \widetilde{N} \to N$ et $\widetilde{f} : \widetilde{N} \to \widetilde{\mathbb{D}}$ les applications naturelles.

Notons $D_i = \pi^{-1}(E_i)$, $i = 1, \ldots, m$ et $D = \bigcup_{i=0}^m D_i$.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{N} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{\mathbb{D}} \arrow[d, "\sigma"] \\
E_i \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & \mathbb{D}
\end{tikzcd}$$

Cette construction nous permet d'avoir un diviseur réduit au dessus de la valeur b.

On note aussi $\widetilde{D}^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ l'union disjointe des intersections $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p}$, pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m_b$.

D'après Steenbrink [**Ste**], on a le corollaire suivant

***Théorème 1* (Steenbrink [Ste] Corollaire 2.9).** — *Il existe une suite spectrale de structures de Hodge mixtes munies d'automorphismes d'ordre fini telle que*

$$E_1^{-r,q+r} = \bigoplus_{k \geqslant \max(0,-r)} H^{q-r-2k}(\widetilde{D}^{(2k+r+1)}, \mathbb{Q})(-r-k) \Longrightarrow (H^q_{\mathrm{lim},b}(F, \mathbb{Q}), S_b).$$

En effet, les groupes de cohomologie $H^q(\widetilde{D}^{(r)}, \mathbb{Q})$ sont munis d'une structure de Hodge pure (car $\widetilde{D}^{(r)}$ est réunion disjointe de variétés projectives lisses), ainsi que d'un automorphisme induit par la monodromie de certains revêtements cycliques $\pi : \widetilde{D}^r \to \widetilde{E}^r$, voir (*loc. cit.*) pour plus de détails.

2.4. Un résultat de A. Dimca en dimension 2. — En dimension 2, il est possible de comparer les deux types de paires spectrales $\mathrm{Spp}(f,b)$ et $\mathrm{Spp}(\overline{f},b)$. On a grâce à Dimca [**Di**] Proposition 3.5 le résultat suivant

Proposition 1. — *Pour $b \in \overline{B}$, on a*

$$\mathrm{Spp}^1(f,b) = \mathrm{Spp}^1(\overline{f},b) + B(f,b)$$

où

$$B(f,b) = (|\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b}|-1)(0,1) + \sum_{\substack{D\subset\mathcal{E}_{\mathrm{dic},b} \\ D \text{ dicritique} \\ a\in D}} \Bigg(\sum_{0<s<k_a} \Big(-\frac{s}{k_a}, 2 \Big) \Bigg), \quad k_a = \mathrm{ord}_a f_{|D}.$$

3. Cas d'une application polynomiale $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

3.1. Construction explicite d'une compactification. — Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une application polynomiale. On supposera pour toute la suite que f a une fibre générale connexe.

L'homogénéisé de f nous donne une fonction rationnelle de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^1$ qui a un nombre fini de points d'indétermination sur la droite à l'infini L_∞. Il existe une suite finie d'éclatements qui nous permettent de prolonger f sur une compactification de $\mathbb{P}^2$. On construit ainsi X, π et $\overline{f}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}^2 \arrow[r, dotted] & \mathbb{P}^1 \\
X \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

On se trouve maintenant dans les circonstances de la section 2.1 et on peut définir les paires spectrales $\mathrm{Spp}^1(f,\infty)$ (resp. le spectre $\mathrm{Sp}^1(f,\infty)$) de f au voisinage de l'infini, où $\{\infty\} = \mathbb{P}^1 \smallsetminus \mathbb{C}$.

Pour pouvoir utiliser la construction de Steenbrink on effectue des éclatements supplémentaires afin d'avoir $\overline{f}^{-1}(t)$ à croisements normaux pour tout t dans $\mathbb{P}^1$.

On classe les composantes de $\overline{f}^{-1}(L_\infty)$ de la façon suivante

$$f^{-1}(L_\infty) = \mathcal{E}_\infty \cup \mathcal{E}_{\mathrm{cte}} \cup \mathcal{E}_{\mathrm{dic}},$$

où

– $\mathcal{E}_\infty$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend la valeur ∞,

– $\mathcal{E}_{\mathrm{cte}}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ prend une valeur constante finie,

– $\mathcal{E}_{\mathrm{dic}}$ est la réunion des composantes sur lesquelles $\overline{f}$ est surjective.