Séminaires & Congrès
10, 2005, p. 391–428

FAMILLE ADMISE ASSOCIÉE À UNE VALUATION DE $K[x]$

par

Michel Vaquié

Résumé. — Toute valuation μ de $K[x]$ prolongeant une valuation ν donnée de K permet de construire une famille admise de valuations de $K[x]$, essentiellement unique, qui converge vers μ. L'étude de l'ensemble $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ des valuations ou pseudo-valuations prolongeant ν à $K[x]$ peut alors se ramener à l'étude de l'ensemble $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ des familles admissibles, ce qui permet en particulier de définir une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{E}(K[x],\nu)$.

***Abstract* (Admissible family associated to a valuation of $K[x]$).** — Any valuation μ of $K[x]$ extending a given valuation ν of K gives a construction of an almost unique admissible family of valuations of $K[x]$, which converges to μ. The study of the set $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ of the valuations or pseudo-valuations extending ν to $K[x]$ is then reduced to the study of the set $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ of admissible families. By this way we can define an order on the set $\mathcal{E}(K[x],\nu)$.

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν, à valeurs dans un groupe ordonné Γ_ν. Nous savons que nous pouvons obtenir toute valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ qui prolonge ν grâce à *une famille admise de valuations convergente* $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ (*cf.* théorèmes 2.4 et 2.5 de [**Va**]).

Nous rappelons dans une première partie les notions de *valuations augmentées*s et de *valuations augmentées limites*, qui sont nécessaires pour définir les familles admises de valuations. Puis nous précisons dans une deuxième partie comment nous pouvons construire la famille admise associée à une valuation μ, ainsi nous pourrons la déterminer de manière essentiellement unique à partir de μ. Cela nous permettra de définir certains invariants de cette valuation et de décrire l'ensemble de toutes les extensions de la valuation ν à $K[x]$. En particulier nous pouvons définir grâce aux

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 13A18, 12J10, 14E15.
Mots clefs. — Valuation, extension, famille admise.

familles admises une relation d'ordre partiel sur cet ensemble, et nous comparons cet ordre avec l'ordre naturel défini par l'ordre sur le groupe des valeurs.

Toute famille admise est réunion de familles *admissibles simples*, qui sont elles-mêmes constituées d'une partie *discrète* et d'une partie *continue*. Dans une troisième partie, nous allons étudier la partie continue d'une famille admissible simple. Nous allons en particulier donner une propriété des *polynômes-clés limites* associés à cette partie continue, propriété équivalente à une propriété des *polynômes-clés* apparaissant dans la partie discrète, propriété caractéristique donnée par MacLane ([**McL1**] Theorem 9.4, [**Va**] Théorème 1.11).

Remerciements. — L'auteur tient à remercier le Mathematical Sciences Research Institute à Berkeley pour lui avoir offert un cadre de travail chaleureux et stimulant, pour un séjour au cours duquel cet article a été en partie rédigé.

1. Valuation augmentée et valuation augmentée limite

Dans ce qui suit nous nous donnons une valuation ν sur un corps K et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ que nous considérons sont des prolongements de ν. Nous nous donnons aussi un groupe totalement ordonné $\widetilde{\Gamma}$, contenant le groupe des ordres Γ_ν de la valuation ν, et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de $K[x]$ ont leur groupe des ordres Γ_μ qui est un sous-groupe ordonné de $\widetilde{\Gamma}$. Nous définissons aussi l'ensemble totalement ordonné $\overline{\Gamma} = \widetilde{\Gamma} \cup \{+\infty\}$.

En fait nous supposerons dans la suite que la valuation ν de K est de rang fini r, alors nous pouvons considérer le groupe des ordres Γ_ν comme un sous-groupe ordonné du groupe $\mathbb{R}^r$ muni de l'ordre lexicographique ([**Ab**], proposition 2.10), que nous notons $\Gamma_{\nu,\mathbb{R}}$. Alors toute valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ qui prolonge la valuation ν est de rang $r+1$ et son groupe des valeurs Γ_μ peut être inclus dans le groupe $\left(\mathbb{R} \oplus \Gamma_{\nu,\mathbb{R}}\right)_{\mathrm{lex}} = \left(\mathbb{R}^{r+1}\right)_{\mathrm{lex}}$. Nous pourons donc supposer dans la suite que le groupe $\widetilde{\Gamma}$ est le groupe $\left(\mathbb{R} \oplus \Gamma_{\nu,\mathbb{R}}\right)_{\mathrm{lex}}$.

Pour toute valuation μ de $K[x]$ nous pouvons définir la notion de *polynôme-clé* ϕ, et si ϕ est un polynôme-clé pour μ et si γ est un élément de $\widetilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [\mu\,;\, \mu'(\phi) = \gamma]$. Dans la suite, chaque fois que nous dirons que μ' est la valuation augmentée associée à un polynôme ϕ et à une valeur γ, ou que nous utiliserons la notation $\mu' = [\mu\,;\, \mu'(\phi) = \gamma]$, nous supposerons que le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ et que la valeur γ appartient à $\widetilde{\Gamma}$ et vérifie $\gamma > \mu(\phi)$. De plus nous pouvons aussi définir la notion de *famille de valuations augmentées itérées* comme une famille dénombrable $(\mu_i)_{i\in I}$ de valuations de $K[x]$, $I = \{1, \dots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}^*$, associée à une famille de polynômes $\left(\phi_i\right)_{i\in I}$ et à une famille $\left(\gamma_i\right)_{i\in I}$ d'éléments de $\widetilde{\Gamma}$, telle que chaque valuation μ_i, $i > 1$, est une valuation augmentée de la forme $\mu_i = [\mu_{i-1}\,;\, \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$ et où la famille des polynômes-clés $\big(\phi_i\big)$ vérifie les deux propriétés suivantes : pour tout $i > 2$ nous avons $\deg\phi_i \geqslant \deg\phi_{i-1}$ et les polynômes ϕ_i et ϕ_{i-1} ne sont pas μ_{i-1}-équivalents.

Nous renvoyons aux articles de MacLane [**McL1**], [**McL2**], et à l'article de l'auteur [**Va**], pour les définitions et les propriétés des polynômes-clés, des valuations augmentées et des familles de valuations augmentées itérées.

Dans [**Va**], nous avons introduit la notion de *famille admissible simple* de valuations de $K[x]$: une famille admissible simple $\mathcal{S}$ est composée par la réunion de deux familles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ définies de la manière suivante.

La famille $\mathcal{D} = (\mu_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de valuations augmentées itérées de $K[x]$ telle que la famille de polynômes-clés $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$ vérifie l'inégalité stricte $\deg\phi_i > \deg\phi_{i-1}$; de plus nous pouvons vérifier que pour tout i, sauf éventuellement pour $i = n$ le plus grand élément de I, la valeur γ_i appartient à $\Gamma_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

La famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est une famille de valuations de $K[x]$, où l'ensemble A est un ensemble totalement ordonné, sans élément maximal, associée à une famille de polynômes $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de même degré d, et à une famille $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ d'éléments de $\widetilde{\Gamma}$, pour tout $\alpha < \beta$ dans A, ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α et la valuation μ_β est la valuation augmentée $\mu_\beta = [\mu_\alpha\,;\,\mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$, avec $\gamma_\beta > \mu_\alpha(\phi_\beta) = \gamma_\alpha$. La famille $\mathcal{C}$ est vide si la famille $\mathcal{D}$ est infinie, sinon le degré d des polynômes-clé ϕ_α est égal au degré du dernier polynôme-clé ϕ_n de la famille $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$ associée à $\mathcal{D}$, et pour tout α dans A, la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n\,;\,\mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$. En fait si nous savons que pour un indice α la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n\,;\,\mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, nous en déduisons que pour tout $\beta > \alpha$, la valuation μ_β est aussi la valuation augmentée $\mu_\beta = [\mu_n\,;\,\mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$. De plus pour tout α dans A, le groupe des ordres de la valuation μ_α est égal au groupe des ordres de la valuation μ_n.

Les familles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont appelées respectivement les parties *discrète* et *continue* de la famille admissible simple $\mathcal{S}$. De plus si la famille $\mathcal{C}$ est vide, c'est-à-dire pour $\mathcal{S} = \mathcal{D}$, nous disons que la famille $\mathcal{S}$ est une *famille admissible simple discrète* ou une *famille admissible discrète*, et si la famille $\mathcal{D}$ ne contient qu'une valuation, c'est-à-dire pour $\mathcal{S} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^*}$ avec $A^* = \{1\} \cup A$, nous disons que la famille $\mathcal{S}$ est une *famille admissible simple continue* ou une *famille admissible continue*.

Remarquons que si $\mathcal{C}$ est la partie continue d'une famille admissible simple $\mathcal{S}$, pour tout α_0 dans A nous pouvons définir le sous-ensemble $A' = \{\alpha \in A \mid \alpha > \alpha_0\}$ et la famille $\mathcal{C}' = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A'}$. Alors $\mathcal{C}'$ est la partie continue d'une nouvelle famille admissible simple $\mathcal{S}'$ définie par $\mathcal{S}' = (\mu_{\alpha_0}) \cup \mathcal{C}'$. La famille $\mathcal{S}'$ est une famille admissible simple continue et est une sous-famille de la famille $\mathcal{C}$. En particulier toute partie continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ d'une famille admissible simple $\mathcal{S}$ telle que A possède un plus petit élément α_0 peut être considérée comme une famille admissible continue, et nous dirons en fait que toute partie continue $\mathcal{C}$ est une famille admissible continue, même si l'ensemble A ne possède pas de plus petit élément.

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible continue de valuations, alors les groupes des ordres des valuations μ_α sont tous égaux à un même sous-groupe Γ de $\widetilde{\Gamma}$, et l'ensemble $\Lambda(A) = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est un sous-ensemble de Γ isomorphe à l'ensemble ordonné A. Nous en déduisons que $\Lambda(A)$ n'a pas de plus grand élément, en particulier si les valuations μ_α sont discrètes de rang un, c'est-à-dire pour $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, cet ensemble n'est pas borné. Nous disons que la famille admissible continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est *exhaustive* si l'ensemble $\Lambda(A)$ est un intervalle du groupe Γ, c'est-à-dire si pour tout $\alpha < \alpha'$ dans A, pour tout élément γ de Γ vérifiant $\gamma_\alpha < \gamma < \gamma_{\alpha'}$, il existe α'' dans A tel que $\gamma = \gamma_{\alpha''}$.

Pour pouvoir définir la notion de *famille admissible* de valuations de $K[x]$ nous devons d'abord introduire la notion de *valuation augmentée limite* associée à une famille admissible continue.

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible continue, associée à la famille $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de polynômes-clés dans $K[x]$ de degré d, et à la famille $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de valeurs dans $\widetilde{\Gamma}$, et soit Γ le groupe des ordres des valuations de $\mathcal{C}$.

Pour tout polynôme f de $K[x]$ et pour tout $\alpha < \beta$ dans A nous avons $\mu_\alpha(f) \leqslant \mu_\beta(f)$, avec l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$ pour $\deg f < d$. De plus, si pour le polynôme f il existe $\alpha < \beta$ avec $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$, alors pour tout $\alpha' > \alpha$ nous avons encore l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_{\alpha'}(f)$. Nous pouvons définir le sous-ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ de $K[x]$ formé des polynômes pour lesquels la famille $\big(\mu_\alpha(f)\big)_{\alpha\in A}$ n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang,

$$\widetilde{\Phi}(A) = \big\{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)\ \forall\, \alpha < \beta \in A\big\}.$$

Pour tout polynôme f de $K[x]$ n'appartenant pas à $\widetilde{\Phi}(A)$ nous posons $\mu_A(f) = \sup\big(\mu_\alpha(f), \alpha \in A\big)$. En particulier $\mu_A(f)$ est défini pour tout polynôme f de degré strictement inférieur à d, et si l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ est vide μ_A est une nouvelle valuation de $K[x]$.

Dans le cas où l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ est non vide nous pouvons définir l'ensemble $\Phi(A)$ des polynômes unitaires appartenant à $\widetilde{\Phi}(A)$ de degré minimal, et tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi(A)$ est un *polynôme-clé limite* pour la famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ (*cf.* [**Va**], proposition 1.21), et un tel polynôme ϕ permet alors de définir une *valuation augmentée limite* pour la famille $\mathcal{C}$.

Rappelons la définition de la valuation augmentée $\mu' = [\mu\,;\, \mu'(\phi) = \gamma]$ de $K[x]$, construite à partir d'une valuation μ, associée à un polynôme-clé ϕ pour μ et à une valeur γ dans $\widetilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$. Pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \cdots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j, $0 \leqslant j \leqslant m$ sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ, et nous avons :

$$\mu'(f) = \inf\big(\mu(g_j) + j\gamma,\ 0 \leqslant j \leqslant m\big).$$

Rappelons que nous pouvons définir aussi pour tout polynôme unitaire ϕ de degré 1, $\phi = x + b$, et pour toute valeur γ de $\widetilde{\Gamma}$ une valuation μ de $K[x]$ de la manière suivante. Tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = a_d\phi^d + \cdots + a_1\phi + a_0$ et nous posons $\mu(f) = \inf\bigl(\nu(a_j) + j\gamma,\ 0 \leqslant j \leqslant d\bigr)$, nous notons cette valuation $\mu = [\nu\,;\ \mu(\phi) = \gamma]$.

De même la valuation augmentée limite μ' construite à partir de la famille admissible continue $\mathcal{C} = \bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha\in A}$, associée au polynôme-clé limite ϕ et à une valeur γ dans $\widetilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, est définie de la manière suivante. Pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons encore le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \cdots + g_1\phi + g_0$, les polynômes g_j, $0 \leqslant j \leqslant m$ sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ, par conséquent sont de degré strictement inférieur à d est nous pouvons définir les valeurs $\mu_A(g_j)$, en fait nous pouvons trouver un indice α_0 tel que pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant m$, nous ayons $\mu_A(g_j) = \mu_\alpha(g_j)$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$. Nous posons alors :

$$\mu'(f) = \inf\bigl(\mu_A(g_j) + j\gamma,\ 0 \leqslant j \leqslant m\bigr).$$

L'application μ' ainsi définie est bien une valuation de $K[x]$, à valeurs dans $\widetilde{\Gamma}$, qui vérifie $\mu'(f) \geqslant \mu_\alpha(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$ et pour tout α dans A, et $\mu'(f) = \mu_A(f)$ pour tout f n'appartenant pas à $\widetilde{\Phi}(A)$. Nous la notons :

$$\mu' = \bigl[\bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha\in A}\,;\ \mu'(\phi) = \gamma\bigr].$$

Nous renvoyons à [**Va**] pour les définitions précises et les propriétés des polynômes-clés limites et des valuations augmentées limites.

Nous pouvons maintenant définir une famille admissible, et aussi fixer les notations que nous utiliserons dans la suite.

Définition. — Une *famille admissible $\mathcal{A}$ pour la valuation ν de K* est une famille de valuations $(\mu_i)_{i\in I}$ de $K[x]$, obtenue comme réunion de familles admissibles simples

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{S}^{(j)},$$

où J est un ensemble dénombrable, $J = \{1, \ldots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, et nous définissons J^* par $J^* = \{1, \ldots, N-1\}$ si J est fini et par $J^* = J = \mathbb{N}^*$ sinon. Pour tout j dans J la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}$ est constituée d'une partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une partie continue $\mathcal{C}^{(j)}$,

$$\mathcal{S}^{(j)} = \bigl(\mathcal{D}^{(j)}; \mathcal{C}^{(j)}\bigr) = \bigl((\mu_l^{(j)})_{l\in L^{(j)}}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\bigr),$$

avec $L^{(j)} = \{1, \ldots, n_j\}$ ou $L^{(j)} = \mathbb{N}^*$ et $A^{(j)}$ ensemble totalement ordonné sans élément maximal, vérifiant :

– pour j appartenant à J^*, la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)} = \bigl(\mu_l^{(j)}\bigr)_{l\in L^{(j)}}$ est finie et la partie continue $\mathcal{C}^{(j)} = \bigl(\mu_\alpha^{(j)}\bigr)_{\alpha\in A^{(j)}}$ est non vide, et la première valuation $\mu_1^{(j+1)}$ de la famille simple $\mathcal{S}^{(j+1)}$ est une valuation augmentée limite pour la famille admissible continue $\mathcal{C}^{(j)}$;