Basculement et homologie cyclique

Bernhard KELLER*

Résumé

Ce rapport est divisé en trois parties : dans la première, nous donnons une introduction à la théorie de basculement (tilting theory) ; dans la deuxième, nous présentons l'interprétation naturelle de cette théorie dans le cadre des catégories dérivées et sa généralisation en une théorie de Morita pour les catégories dérivées ; dans la troisième, nous donnons une vue d'ensemble des invariants par les équivalences introduites dans les deux premières parties. En particulier, nous rapportons un résultat que nous avons obtenu récemment sur l'invariance de l'homologie cyclique.

Je remercie S. König pour ses remarques pertinentes sur une version antérieure de ces notes.

Abstract

This report is divided into three parts: in the first, we give an introduction to the tilting theory; in the second, we present the natural interpretation of this theory in the frame of derived categories and its generalization to obtain a Morita theory for derived categories; in the third part, we give a general view of the invariants under the equivalences introduced in the first two parts. In particular, we report on a result we obtained recently about the invariance of the cyclic homology.

1 Equivalence par basculement

1.1 Introduction

Soient A et B deux anneaux. Rappelons que A et B sont équivalents au sens de Morita [63] s'il existe une équivalence de catégories

$$\mathrm{Mod\,A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod\,B}\ ,$$

où $\mathrm{Mod\,A}$ désigne la catégorie des A-modules (à droite). L'équivalence par basculement est une généralisation de l'équivalence au sens de Morita : ici, au lieu

AMS 1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*): 16E40, 18E30

*U.F.R. de Mathématiques, U.R.A. 748 du CNRS, Université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

de demander l'existence d'une équivalence $\mathrm{Mod}\,\mathrm{A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}\,\mathrm{B}$, on se contente d'un couple de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{c} \mathrm{Mod}\,\mathrm{B} \\ F \downarrow \uparrow G \\ \mathrm{Mod}\,\mathrm{A} \end{array}$$

vérifiant certaines conditions énoncées plus bas qui apparaissent de façon naturelle dans l'exemple suivant :

1.2 Exemple des 4 sous-expaces

Soit k un corps. Dans leur article [27], I. M. Gelfand et V. A. Ponomarev étudient les quadruplets de sous-espaces d'un k-espace vectoriel et, plus généralement, les quadruplets V d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "v_1"] & \\ V_2 \arrow[r, "v_2"] & V_\omega \\ V_3 \arrow[ur, "v_3"] & \\ V_4 \arrow[uur, "v_4"'] & \end{tikzcd} .$$

Si V et V' sont deux tels quadruplets, un *morphisme* $f : V \to V'$ est la donnée de cinq applications linéaires

$$g_i : V_i \to V'_i\ ,\ i \in \{1, 2, 3, 4, \omega\}$$

telles que $g_\omega\ v_i = v'_i\ g_i$ pour $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Les quadruplets deviennent ainsi les objets d'une catégorie abélienne, à savoir la catégorie des représentations [24, Sect. 4] du carquois Q suivant :

$$\mathrm{Q} : \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[r] & \omega \\ 3 \arrow[ur] & \\ 4 \arrow[uur] & \end{tikzcd} .$$

Notons $\mathrm{Rep}\,Q$ cette catégorie et $\mathrm{Rep}\,Q'$ la catégorie des représentations du carquois Q' obtenu par « basculement » à partir de Q :

$$\text{Q' :}\quad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 1 \\ & 2 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\ & 3 \\ & 4 \end{tikzcd} \quad .$$

Gelfand–Ponomarev relient ces catégories par un couple de « foncteurs basculants »

$$\begin{array}{c} \operatorname{Rep} Q' \\ F \downarrow\ \uparrow G \\ \operatorname{Rep} Q \end{array}$$

où G envoie un quadruplet $V \in \operatorname{Rep} Q$ sur le quadruplet W

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & W_1 \\ & W_2 \\ W_0 \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\ & W_3 \\ & W_4 \end{tikzcd} \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{rcl} W_i & = & V_i\ ,\ i = 1, \dots, 4 \\ W_0 & = & \operatorname{Ker}(\mathrm{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{V}_4 \overset{[\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_4]}{\longrightarrow} \mathrm{V}_\omega) \end{array}$$

et F envoie un quadruplet $W \in \operatorname{Rep} Q'$ sur le quadruplet V

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] V_1 \arrow[ddr] & \\ V_2 \arrow[dr] & \\ & V_\omega \\ V_3 \arrow[ur] & \\ V_4 \arrow[uur] & \end{tikzcd} \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{rcl} V_i & = & W_i\ ,\ i = 1, \dots, 4 \\ V_\omega & = & \operatorname{Cok}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} : \mathrm{W}_0 \longrightarrow \mathrm{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{W}_4 \right). \end{array}$$

Il est facile de vérifier que F est adjoint à gauche à G. Les foncteurs F et G ne sont pas des équivalences mais ils induisent des équivalences entre la sous-catégorie pleine $\mathscr{A}_0 \subset \operatorname{Rep} Q$ formée des V tels que $[v_1, \dots, v_4]$ est surjectif et son image $\mathscr{A}'_0 \subset \operatorname{Rep} Q'$ formée des W tels que ${}^t[w_1, \dots, w_4]$ est injectif.

Un objet V appartient au noyau de G ssi il est concentré en ω (i.e. $V_i = 0$ pour $i = 1, \dots, 4$) et un objet W appartient au noyau de F ssi il est concentré en 0. Ainsi, les catégories $\operatorname{Ker} \mathrm{F}$ et $\operatorname{Ker} \mathrm{G}$ sont équivalentes elles aussi.

Nous voyons donc que les deux catégories en question sont « équivalentes par morceaux ». Afin de pouvoir formuler cette idée dans un contexte général, nous avons besoin d'une interprétation intrinsèque des « morceaux » et de leurs équivalences : notons $\mathbf{L}_1F$ le premier dérivé à gauche de F et $\mathbf{R}^1G$ le premier dérivé à droite de G (au sens de l'algèbre homologique [16]). On vérifie aisément (lemme du serpent !) que $\mathbf{R}^1G$ envoie un quadruplet V sur

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \\ & 0 \\ W_0 \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\ & 0 \\ & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{où} \qquad W_0 = \mathrm{Cok}\,(\mathrm{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{V}_4 \xrightarrow{[\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_4]} \mathrm{V}_\omega)$$

et que $\mathbf{L}_1F$ envoie un quadruplet W sur

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 0 \arrow[ddr] & \\ 0 \arrow[dr] & \\ & V_\omega \\ 0 \arrow[ur] & \\ 0 \arrow[uur] & \end{tikzcd} \qquad \text{où} \qquad V_\omega = \mathrm{Ker}\,(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} : \mathrm{W}_0 \longrightarrow \mathrm{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{W}_4).$$

Ainsi nous avons $\mathscr{A}_0 = \mathrm{Ker}\,\mathbf{R}^1G$, $\mathscr{A}'_0 = \mathrm{Ker}\,\mathbf{L}_1F$, ces sous-catégories sont équivalentes par F et G, et les noyaux $\mathrm{Ker}\,\mathrm{F}$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{G}$ sont équivalentes par les foncteurs $\mathbf{L}_1F$ et $\mathbf{R}^1G$. Puisque $\mathbf{L}_1F$ est exact à gauche, les dérivés supérieurs de F s'annulent, c'est-à-dire que F est de dimension cohomologique ≤ 1. On voit de même que G est également de dimension cohomologique ≤ 1. Si nous interprétons les catégories $\mathrm{Rep}\,Q$ et $\mathrm{Rep}\,Q'$ comme les catégories des représentations des algèbres de chemins [24, Sect. 4] associées à Q et Q', nous voyons que nous sommes en présence d'une équivalence par basculement au sens de la définition suivante :

1.3 Définition

Soient A et B deux anneaux. Une *équivalence par basculement* $B \rightsquigarrow A$ est la donnée d'un couple de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{c} \mathrm{Mod}\,\mathrm{B} \\ F \downarrow\ \uparrow G \\ \mathrm{Mod}\,\mathrm{A} \end{array}$$

tels que

a) F et G sont de dimension cohomologique ≤ 1,

$\mathrm{b}_0)$ F et G induisent des équivalences entre $\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}_1 F$ et $\mathrm{Ker}\,\mathbf{R}^1 G$,

$\mathrm{b}_1)$ $\mathbf{L}_1 F$ et $\mathbf{R}^1 G$ induisent des équivalences entre Ker F et Ker G.

On peut montrer [75] (voir aussi [52]) que la condition $\mathrm{b}_1)$ est une conséquence de a) et $\mathrm{b}_0)$.

1.4 Modules basculants

Soient A et B deux anneaux et $F : \mathrm{Mod\,B} \to \mathrm{Mod\,A}$ un foncteur quelconque qui admet un adjoint à droite G. Alors F est exact à gauche et pour le B-A-bimodule $T = F(A_A)$, nous avons un isomorphisme canonique

$$F \xrightarrow{\sim} ? \otimes_B T.$$

L'unicité du foncteur adjoint nous donne alors l'isomorphisme

$$G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(T, ?)$$

où la structure de B-module à gauche de T donne la structure de B-module à droite de $\mathrm{Hom}_A(T, ?)$. Comme dans le cas de l'équivalence de Morita, toute équivalence par basculement est donc donnée par un bimodule T. Le théorème suivant traduit les conditions énoncées dans la définition d'une équivalence par basculement en des conditions sur ce bimodule. Après des travaux précurseurs [27], [10], [2], [58], ce théorème a été formulé et démontré pour la première fois (sous une forme légèrement différente) par S. Brenner et M. C. R. Butler [13]. Sous sa forme actuelle, il est dû à D. Happel et C. M. Ringel [37]. Nous renvoyons à [12] pour une démonstration directe et pour le « lemme de Bongartz » qui affirme que dans le cas d'une algèbre A de dimension finie et de dimension globale finie la condition d) du théorème peut être remplacé par la condition que le A-module T admet autant de facteurs directs indécomposables non-isomorphes deux à deux que l'algèbre A admet de modules simples non-isomorphes deux à deux.

Théorème 1.1 ([13], [37]) — *Soient A et B deux anneaux et T un B-A-bimodule. Alors les foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Mod\,B} & \\ F = ? \otimes_B T & \downarrow\ \uparrow & \mathrm{Hom}_A(T, ?) = G \\ & \mathrm{Mod\,A} & \end{array}$$

définissent une équivalence par basculement $B \rightsquigarrow A$ si et seulement si

a) *l'application canonique $B \to \mathrm{End}_A(T)$ est un isomorphisme,*

b) *les groupes $\mathrm{Ext}^i_A(T, T)$ s'annulent pour tout $i > 0$,*