Histoire de la théorie des faisceaux

Christian Houzel*

Résumé

La notion de faisceau a été introduite par Jean Leray juste après la guerre, dans le prolongement de travaux entrepris durant sa captivité en Autriche. Leray a défini des groupes de cohomologie pour les applications continues, et relié la cohomologie d'une application à celle de sa source grâce à la suite spectrale, introduite à ce propos. Henri Cartan a reformulé la théorie des faisceaux dans son Séminaire et, avec Jean-Pierre Serre, il en donna des applications spectaculaires à la théorie des espaces analytiques. Par la suite, Serre a étendu à la géométrie algébrique ces méthodes que Grothendieck a largement rénovées et généralisées. Enfin, Sato a exploité les méthodes de Grothendieck dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules, fondant ainsi l'analyse microlocale.

Abstract

Sheaf theory was introduced by Jean Leray just after the Second World War, as a continuation of his work while he was a prisoner in Austria. Leray defined cohomology groups for continuous maps, and related them to the cohomology of the source space by means of the spectral sequence he introduced for this purpose. Henri Cartan reformulated sheaf theory in his seminar and, together with Jean-Pierre Serre, gave spectacular applications to the theory of analytic spaces. Subsequently Serre extended these methods to algebraic geometry, when Grothendieck enlarged and generalized them enormously. Finally Sato applied Grothendieck's methods to $\mathcal{D}$-modules, creating microlocal analysis.

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A65, 55-03, 14-03, 35A27
*I.U.F.M. Paris 10, rue Molitor, 75016 Paris.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1998

1. Introduction

La notion de faisceau, introduite pour la première fois par J. Leray en 1946, avec la théorie cohomologique correspondante et la notion de suite spectrale, est une de celles qui a renouvelé le plus profondément les méthodes de la géométrie. Leray avait en vue une reconstruction de la topologie algébrique, mais la théorie des faisceaux n'a pas tardé à donner, entre les mains de H. Cartan et de J.-P. Serre, les outils nécessaires à la théorie des espaces analytiques et à la géométrie algébrique. A. Grothendieck a développé l'algèbre homologique dans un cadre assez large pour contenir la cohomologie à valeurs dans un faisceau et ses travaux de géométrie algébrique l'ont amené à reformuler l'algèbre homologique en termes de catégories dérivées et à étendre les notions d'espace topologique et de faisceau en définissant les topos. Les catégories dérivées donnent le bon cadre pour définir les opérations fondamentales sur les faisceaux (images directes ou images réciproques, produits tensoriels, objets Hom). Ce cadre a été systématiquement exploité par M. Sato pour élaborer la théorie des $\mathcal{D}$-modules (ou systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires) sur des variétés analytiques réelles ; à côté des six opérations de Grothendieck, Sato considère aussi deux nouvelles opérations, la spécialisation et la microlocalisation le long d'une sous-variété, qui conduisent à des faisceaux sur le fibré tangent et sur le fibré cotangent respectivement. Dans cet exposé, nous indiquerons comment Leray a inventé la notion de faisceau et comment Cartan l'a transformée ; laissant de côté les travaux de Grothendieck exposés par P. Deligne, nous terminerons en indiquant la définition des foncteurs de spécialisation et de microlocalisation de Sato.

2. Le cours de captivité de Leray

Prisonnier en Autriche pendant la guerre, Leray a participé à une université de captivité dans l'Oflag XVII ; il avait préféré traiter un sujet plus loin des applications que sa spécialité (l'hydrodynamique) de peur d'être requis pour travailler à l'effort de guerre allemand et il avait choisi de faire un cours de topologie algébrique. Dans ce cours, qu'il a publié en 1945 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [Leray 1945a,b,c], il cherchait à se débarrasser des hypothèses inutiles et à associer aux espaces topologiques des invariants algébriques sans passer par des constructions intermédiaires. Les invariants qu'il considérait étaient les groupes de *cohomologie* plutôt que les groupes d'homologie ; la distinction entre les deux théories datait de 1935 [Alexander 1935, Kolmogorov 1936], et la cohomologie présente l'avantage d'avoir toujours une structure multiplicative dont celle de l'homologie dérive dans le cas où on dispose de la dualité de Poincaré. Leray appelle « homologie » la cohomologie et il parle de « groupes de Betti » pour signifier l'homologie.

Le procédé de Leray est inspiré de l'homologie de Čech mais, pour éviter les constructions intermédiaires (nerf d'un recouvrement, etc.), il remplace les recouvrements utilisés par Čech par des objets qui portent déjà une structure algébrique : les « couvertures ». Il appelle « complexe abstrait » une suite de groupes commutatifs libres de type fini, chacun muni d'une base $(X^{p^\alpha})_\alpha$, avec une suite de (co)bords appliquant le groupe de degré (Leray dit plutôt « dimension ») p dans le groupe de degré $p+1$. Les cobords sont linéaires et définis par leur action sur les éléments de base :

$$X^{p^\alpha} \longmapsto \dot{X}^{p^\alpha} ;$$

on impose que le cobord d'un cobord soit nul. Un complexe abstrait est rendu « concret » en associant à chaque élément de base X^{p^α} un « support » $|X^{p^\alpha}|$ qui est une partie non vide de l'espace topologique E dont on veut définir la cohomologie ; on impose que $|X^{q^\beta}|$ soit contenu dans $|X^{p^\alpha}|$ chaque fois que X^{q^β} est « adhérent » à X^{p^α}, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'éléments de base commençant par X^{p^α} et aboutissant à X^{q^β} et dont chacun intervient dans le cobord du précédent. Un tel complexe concret K est une couverture s'il vérifie les axiomes suivants :

– les supports sont fermés ;

– pour tout point x de E, le sous-complexe xK engendré par les éléments de base dont le support contient x est un « simplexe », c'est-à-dire que sa cohomologie est triviale ;

– la somme K^0 des éléments de degré 0 est un (co)cycle, le cocycle unité.

Leray définit alors les « formes » d'une couverture K à coefficients dans un anneau A : en degré p, ce sont les combinaisons linéaires L^p des X^{p^α} à coefficients dans A. Le cobord d'une forme est défini à partir de celui de K et on sait donc définir les formes qui sont des cocycles et celles qui sont des cobords. La cohomologie $H^p(E, A)$ est définie comme celle des formes d'une couverture quelconque de E. Pour cela, si K et K' sont deux couvertures, il convient d'identifier une forme L^p de la couverture K avec la forme $L^p.K'$ de la couverture intersection $K.K'$; celle-ci est définie comme un quotient du produit tensoriel $K \otimes K'$ pour lequel on pose

$$|X^{p^\alpha} \otimes X'^{q^\beta}| = |X^{p^\alpha}| \cap |X'^{q^\beta}|$$

et on annule les éléments de support vide. Leray démontre que, lorsque l'espace E est normal, il suffit de considérer une famille de couvertures stable par intersection et admettant des supports arbitrairement petits ; lorsque E est compact, une seule couverture suffit, à condition que ses supports soient « simples » (c'est-à-dire à cohomologie triviale).

3. Les faisceaux et la suite spectrale

L'étape suivante dans la construction de Leray consiste à associer une théorie cohomologique à toute application continue fermée π d'un espace normal E dans un autre E^* ; elle est exposée dans une suite de notes aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences en 1946. L'idée vient probablement de l'étude de la topologie d'une variété en considérant sa projection dans une variété de dimension inférieure et les propriétés des fibres de cette projection ; Picard avait traité la topologie des surfaces algébriques de cette manière et cette méthode avait été étendue par Lefschetz en dimension plus grande. Leray se réfère explicitement au travail de N. Steenrod sur l'homologie des espaces fibrés [Steenrod 1943].

Le problème est que la cohomologie des fibres varie. Picard et Lefschetz, dans le cas où les fibres sont des courbes algébriques, se servaient de l'équation différentielle vérifiée par les périodes des intégrales abéliennes sur ces courbes (connexion de Gauss-Manin) et de la monodromie de cette équation. Steenrod avait introduit la notion de « système local de coefficients » dans le cas d'un fibré ; les fibres sont homéomorphes, mais il faut tenir compte de l'opération du groupe fondamental de la base dans leur homologie (analogue à la monodromie de Picard-Lefschetz). Dans le cas général qu'il considère, Leray introduit la notion de faisceau pour relier entre elles les cohomologies des fibres : au lieu de considérer seulement les fibres $\pi^{-1}(x^*)$ $(x^* \in E^*)$ et leur cohomologie, il considère les fermés F^* de E^*, leurs images réciproques $\pi^{-1}(F^*)$ et la cohomologie de ces images réciproques.

Cela le conduit à définir un faisceau $\mathcal{B}$ de modules (ou d'anneaux) sur un espace topologique E comme une fonction associant à chaque fermé F de E un module (ou un anneau) $\mathcal{B}_F$ de manière que $\mathcal{B}_\emptyset = 0$; pour chaque couple de fermés f, F tels que $f \subset F$, on se donne de plus un homomorphisme de restriction $b_F \mapsto b_F.f$ de $\mathcal{B}_F$ dans $\mathcal{B}_f$ et on impose la condition de transitivité

$$(b_F.f).f' = b_F.f'$$

chaque fois que

$$f' \subset f \subset F.$$

Un tel faisceau est dit *normal* si tout élément b_F d'un $\mathcal{B}_F$ est la restriction d'un $b_V \in \mathcal{B}_V$ où V est un voisinage fermé de F et si, de plus, la condition $b_F.f = 0$ (avec $f \subset F$) implique l'existence d'un voisinage fermé v de f contenu dans F et tel que $b_F.v = 0$. Ces conditions signifient que $\mathcal{B}_F$ est la limite inductive des $\mathcal{B}_V$ où V parcourt la famille des voisinages fermés de F. L'exemple typique d'un faisceau sur E est donné par

$$F \longmapsto H^p(F, A)$$

où A est un anneau fixé ; ce faisceau est normal si l'espace E est normal.

Leray définit alors la cohomologie de E relative à un faisceau $\mathcal{B}$ en considérant les formes d'une couverture de E à coefficients dans $\mathcal{B}$; en degré q, ce sont des combinaisons linéaires $\sum b_\alpha X^{q,\alpha}$ où $X^{q,\alpha}$ parcourt la base du groupe de degré q de la couverture et, pour chaque α, $b_\alpha \in \mathcal{B}_{|X^{q,\alpha}|}$. Pour avoir de bonnes propriétés, Leray suppose E et $\mathcal{B}$ normaux. Lorsque E admet une couverture C dont les supports sont simples relativement à $\mathcal{B}$, la cohomologie peut se calculer en utilisant uniquement cette couverture.

Si maintenant $\pi : E \to E^*$ est une application continue fermée entre deux espaces topologiques normaux (Leray dit une « représentation fermée ») et si $\mathcal{B}$ est un faisceau normal de modules sur E, Leray définit le faisceau image $\pi(\mathcal{B})$ sur E^* en posant

$$\pi(\mathcal{B})_{F^*} = \mathcal{B}_{\pi^{-1}(F^*)}$$

pour tout fermé F^* de E^* ; les restrictions de $\pi(\mathcal{B})$ sont induites par celles de $\mathcal{B}$ et on voit que $\pi(\mathcal{B})$ est un faisceau normal. L'anneau de coefficients A étant choisi, on considère le faisceau

$$\mathcal{B}^p : F \longmapsto H^p(F, A)$$

sur E et le module $H^q(E^*, \pi(\mathcal{B}^p))$ est le (p, q)-ième module de (co)homologie de π relatif à A.

Dans sa deuxième note, Leray montre comment la cohomologie de π contient une information sur la cohomologie de E : c'est la première apparition de la suite spectrale. L'idée vient de l'analyse du lemme qui servait, dans le cours de captivité, à établir que la cohomologie d'un espace normal peut se calculer à l'aide d'une famille de couvertures stable par intersection et avec des supports arbitrairement petits ; Leray démontrait que, si K^* est une couverture et C' est un complexe tel que $K^* \cdot e$ soit un simplexe pour tout support e de C', les cohomologies de C' et de $K^* \cdot C'$ sont identiques. Il note maintenant $\mathcal{P}_1^{p,q}$ le (p, q)-ième module de cohomologie de π et il affirme que ce module contient des sous-modules