Le mouvement brownien

Un essai sur les origines de la théorie mathématique

Jean-Pierre Kahane*

Résumé

Vue de loin, l'histoire du mouvement brownien se divise en deux périodes : entre 1900 et 1950, une évolution lente, ponctuée par les travaux d'Einstein, Wiener et Lévy ; depuis 1950, une efflorescence indescriptible. En l'examinant de près, on repère différents thèmes et sources présents dès l'origine. On s'attache ici surtout à la première période, en dégageant cinq sources principales, et en survolant les thèmes correspondants au cours de la seconde période : 1) Einstein, Wiener et le processus de Wiener – 2) Langevin, Doob et les équations différentielles stochastiques – 3) Borel, Steinhaus et les séries de fonctions aléatoires – 4) Bachelier, Kolmogorov, les processus et les diffusions – 5) Pearson, Pólya et les marches au hasard.

Abstract

The paper is a historical survey of the mathematical theory of Brownian motion, with a particular emphasis on the period 1900–1950, and only short allusions to recent developments. It is organized along five lines: 1) Einstein, Wiener, and the Wiener process – 2) Langevin, Doob, and stochastic differential equations – 3) Borel, Steinhaus, and random series of functions – 4) Bachelier, Kolmogorov, processes and diffusions – 5) Pearson, Pólya, and random walks.

Si un mathématicien regarde de loin l'histoire du mouvement brownien au cours de ce siècle, il y verra sans doute deux périodes : entre 1900 et 1950,

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A60, 60J65

*Mathématiques; Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex.

une évolution lente et linéaire, repérable par les pères fondateurs que furent Albert Einstein, Norbert Wiener, Paul Lévy ; et depuis 1950, une efflorescence difficile à maîtriser, avec la poursuite des propriétés fines qui font du mouvement brownien l'un des prototypes de la fractalité, le mouvement brownien sur les variétés, le mouvement brownien à plusieurs paramètres, le mouvement brownien à la source ou au carrefour des études sur les processus gaussiens, les processus à accroissements indépendants, les processus de Markov avec leur lien à la théorie du potentiel, les martingales, les équations différentielles stochastiques, les intégrales de chemins, les superprocessus qui décrivent des particules qui se scindent au cours du temps, etc... La littérature sur le mouvement brownien est facile à inventorier et même à lire dans la première période, et difficile à maîtriser dans la seconde ; Daniel Revuz et Marc Yor, dans leur livre *Continuous martingales and Brownian motion* [Revuz et Yor 1991] font état d'une littérature énorme, dont la bibliographie qu'ils donnent, avec 500 titres, ne fournit qu'une faible idée. Il y a heureusement, sur différents aspects, beaucoup de bons livres qui permettent d'accéder dans cette forêt.

La théorie mathématique du mouvement brownien, mise en place par Norbert Wiener, est à la fois si simple au départ, si belle et si riche qu'elle a conquis une large audience chez les mathématiciens et aussi chez les physiciens. Mais il faut préciser dès maintenant que ce n'est qu'une des idéalisations mathématiques du mouvement réel de particules en suspension dans un liquide, tel qu'il fut observé et décrit par le botaniste anglais Richard Brown en 1828, et, à sa suite, par plusieurs physiciens expérimentateurs au XIX^{e} siècle. Ce n'est même pas la meilleure idéalisation pour l'application de la théorie d'Einstein à la détermination du nombre d'Avogadro. Wiener, d'ailleurs, fut toujours prudent à cet égard.

J'ai choisi de parler surtout de la première période. Elle est beaucoup moins linéaire qu'il y paraît d'abord. Einstein n'est pas la source unique, ni Wiener le seul canal. Il y a des affluents divers, dont on retrouve parfois la trace dans l'efflorescence contemporaine. J'ai identifié cinq cheminements, que je m'efforcerai de suivre en repérant les croisements et les prolongements dans la période contemporaine. Schématiquement, chaque voie est signalée par un initiateur, un formalisateur et un sujet. Le plan de l'exposé est donc ainsi fait :

1. Einstein, Wiener et le processus de Wiener

1 bis. Définitions et commentaires

2. Langevin, Doob et les équations différentielles stochastiques
3. Borel, Steinhaus et les séries de fonctions aléatoires
4. Bachelier, Kolmogorov, les processus et les diffusions
5. Pearson, Pólya et les marches au hasard

Un appendice contiendra mes excuses pour tout ce que je n'aurai pas dit.

1. Einstein, Wiener et le processus de Wiener

En même temps que Smoluchowski, sur lequel je reviendrai, Einstein publie dans *Annalen der Physik* trois articles fondateurs pour la théorie du mouvement brownien, en 1905 et 1906. Je rappelle que les *Annalen der Physik* de 1905 contiennent également les articles d'Einstein sur la relativité et sur l'effet photoélectrique.

Voici le titre et la conclusion du premier article :

> « Ueber die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefordete Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen »

(Sur le mouvement, exigé par la théorie cinétique moléculaire de la chaleur, de particules en suspension dans un liquide au repos)

> « Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden ! »

(Souhaitons que bientôt un chercheur parvienne à trancher la question ici posée, si importante pour la théorie de la chaleur !)

La question posée est celle de l'*existence* du mouvement indiqué par le titre. Einstein en fait la théorie sous l'hypothèse de l'agitation thermique moléculaire, sans connaître les observations faites sur le mouvement brownien.

Entre le premier et le second article il prend connaissance du mouvement brownien. La question de l'existence est donc réglée. Il montre alors comment des mesures faites sur le mouvement des particules peuvent conduire à une nouvelle détermination des dimensions moléculaires, ce que dit bien le titre du second article : « Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen ».

Enfin le troisième article, « Zur Theorie der Brownschen Bewegung », donne une théorie générale, tenant compte de la gravité, et incluant le mouvement brownien de rotation. Einstein a donné ensuite un exposé synthétique sous la forme d'un petit livre, publié en 1922, et disponible depuis 1926 en traduction anglaise.

La formule principale est

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{RT}{N}\frac{1}{3\pi\mu a}\tau$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température absolue, N le nombre d'Avogadro ($\sim 6 \times 10^{23}$), μ la viscosité, a le rayon de la particule, supposée sphérique, et τ le temps correspondant au déplacement Δx. Quant à $\overline{(\Delta x)^2}$, c'est une moyenne, pour un intervalle de temps donné τ, du carré des déplacements, dans une direction donnée, d'un grand nombre de particules. Mais c'est aussi la moyenne, pour une suite d'intervalles de temps consécutifs, du carré des déplacements dans une direction d'une particule individualisée.

Le programme d'Einstein fut réalisé par Jean Perrin, et publié en 1909 dans les *Annales de Chimie et de Physique* sous le titre : « Mouvement brownien et réalité moléculaire. » Perrin obtient par ce moyen $N \simeq 7 \times 10^{23}$, ce qui confirme les estimations obtenues par d'autres procédés. Ce travail devait lui valoir le prix Nobel en 1926. Dans son article de 1909 et dans son livre de 1912 *Les atomes*, Perrin décrit éloquemment l'extrême irrégularité des trajectoires et le fait qu'apparemment elles n'ont de tangente en aucun point. Sa description, dans *Les atomes*, se conclut par une phrase que Wiener se plaisait à citer :

> « C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer. »

Dans la théorie d'Einstein il apparaît aussi que, pour un τ donné, les déplacements Δx ont une distribution gaussienne, et que cette distribution, fonction du temps et de l'espace, satisfait à l'équation de diffusion de la chaleur. Les mathématiciens, Wiener le premier, ont retenu de l'équation d'Einstein la proportionnalité de $\overline{(\Delta x)^2}$ et de $\tau = \Delta t$, et le fait que les Δx sont gaussiens. L'équation, normalisée, s'écrit alors

$$\overline{(\Delta x)^2} = \Delta t$$

ou, en explicitant les valeurs du temps, et en utilisant le symbole $E(\cdot)$ de l'espérance au lieu de surligner pour la valeur moyenne,

$$E\left((X_t - X_s)^2\right) = |t - s|.$$

Aujourd'hui (disons, depuis Wiener, Steinhaus et Kolmogorov) l'espérance nous apparaît comme une intégrale sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X_t signifie $\omega \to X_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, et l'équation d'Einstein signifie que, dans l'espace $L^2(\Omega)$, le point X_t décrit ce que I. Schoenberg a appelé plus tard une hélice, c'est-à-dire une courbe qui glisse isométriquement sur elle-même quand on translate le temps. C'est une très jolie hélice, où le carré de la distance de deux points est la distance des paramètres et où par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, trois points quelconques sont toujours les sommets d'un triangle rectangle. Selon Einstein, le processus est gaussien et centré, c'est-à-dire que l'hélice se trouve dans un sous-espace $\mathcal{H}$ de $L^2(\Omega)$ constitué de variables gaussiennes centrées (ce qui signifie $E(\exp uX) = \exp\left(\frac{u^2}{2}EX^2\right)$), et dans un tel espace l'orthogonalité équivaut à l'indépendance. Conformément au sens physique, les accroissements de X_t sur des intervalles disjoints de temps sont des v. a. indépendantes ; on dit que $t \to X_t$ est un processus à accroissements indépendants. Au stade où nous laisse Einstein, seule la réalité physique du mouvement brownien fonde l'existence de l'*hélice brownienne* que je viens de décrire.

Wiener entre en scène bien plus tard, en 1923, avec un article fondamental intitulé « Differential space ». Il connaît la théorie d'Einstein depuis sa visite à Cambridge en 1913 ; il était venu, à 19 ans, étudier la logique avec Bertrand Russell, mais Russell lui avait suggéré d'aller écouter Hardy et de lire Einstein. Dans l'intervalle, il a étudié l'intégrale de Daniell, et s'est intéressé à l'intégration dans des espaces de fonctions. Son idée de base est de construire sur l'espace des fonctions continues réelles sur $\mathbb{R}^+$, $C(\mathbb{R}^+)$, une mesure de probabilité telle que les accroissements sur des intervalles de temps disjoints aient la distribution gaussienne prévue par la théorie d'Einstein. Ces accroissements sont des différences, d'où le titre de *Differential space*.

La mesure ainsi construite s'appelle justement *mesure de Wiener* et l'intégrale par rapport à cette mesure *moyenne de Wiener*. Une fois effectuée la construction, Wiener intègre des fonctionnelles diverses. Il vérifie qu'en tout point t donné la probabilité de dérivabilité en t est nulle (ce qui, contrairement à certains commentaires, est encore loin de prouver que la non-dérivabilité partout est presque sûre), puis il établit que la probabilité de vérifier une condition de Hölder d'ordre $\frac{1}{2} - \epsilon$ sur un intervalle donné est égale à 1. Ainsi, la mesure de Wiener est concentrée sur des fonctions höldériennes. Enfin, Wiener donne la loi des coefficients de Fourier. Sur l'intervalle $(0, 2\pi)$, cela permet de développer une fonction nulle en 0 sous la forme

$$X_t = \xi_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_1^\infty \frac{\xi_n(1-\cos nt) + \xi_n' \sin nt}{n\sqrt{\pi}}$$

où ξ_0, ξ_1, ξ_1', $\cdots$ est une suite de variables gaussiennes normalisées ($E\xi = 0$, $E\xi^2 = 1$) et indépendantes, ce que j'appellerai un échantillon normal.

C'est la *série de Fourier-Wiener*, encore implicite en 1923, explicitée à l'occasion de la collaboration avec Paley et Zygmund en 1933.

Dans une étude écrite en 1964 sur Wiener et l'intégration dans les espaces fonctionnels, Marc Kac met en évidence la profonde originalité de Wiener et, en contre partie, la difficulté qu'eurent les mathématiciens de l'époque à