CARNET

Jacqueline Ferrand et son œuvre

(1918-2014)

Pierre Pansu

Née en 1918 à Alès (Gard), Jacqueline Ferrand est bachelière en 1934. En 1936, elle entre à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, où elle passe l'agrégation (masculine) en 1939. Elle prend immédiatement fonction d'agrégée préparatrice à l'École normale supérieure de Jeunes Filles. La directrice, Madame Cotton, convaincue que les filles devaient nourrir les mêmes ambitions intellectuelles que les garçons, comptait sur cette jeune mathématicienne d'exception pour amener l'enseignement des mathématiques à Sèvres au niveau de celui de la rue d'Ulm. Nous avons de nombreux témoignages de l'énergie avec laquelle Jacqueline Ferrand s'acquitte de cette tâche, dans les conditions matérielles difficiles de l'époque. Avec la même énergie elle se lance dans la recherche, sous la direction lointaine d'Arnaud Denjoy. Elle soutient le 12 juin 1942 une thèse remarquée, qui lui vaudra d'être distinguée par l'Institut (prix Girbal Barral en 1943) et la Fondation Peccot en 1946. Sa carrière universitaire sera ensuite très rapide : chargée de cours à Bordeaux en 1943, elle est professeur à Caen en 1945, à Lille en 1948 puis à Paris, de 1956 à sa retraite en 1984.

Premiers travaux

La thèse de Jacqueline Ferrand porte sur les valeurs au bord de la représentation conforme d'un domaine plan. Depuis Riemann, Koebe et Poincaré, on sait que tout domaine simplement connexe D' du plan admet une représentation conforme f sur le disque D, i.e., une carte géographique dans laquelle les angles sont conservés. On peut voir f comme une fonction analytique d'une variable définie sur le disque, qui est une bijection du disque sur D'. La question se pose de savoir si f admet une limite en chaque point du bord. La réponse est oui si le bord de D' est suffisamment régulier, et le problème devient difficile si le bord est irrégulier.

En 1913, C. Carathéodory a fait un pas décisif en introduisant la notion de bout premier. Carathéodory considère des coupures emboîtées de D'. Ce sont des suites de sous-domaines emboîtés délimités par des arcs simples reliant deux points du bord, et dont la longueur tend vers 0. Deux suites de coupures sont dites équivalentes si chacune peut être emboîtée dans l'autre. Un bout premier est une classe d'équivalence de coupures emboîtées. Cette définition, qui fait intervenir des longueurs, n'est pas évidemment invariante par transformation conforme. Carathéodory donne une preuve de l'invariance qui repose sur des propriétés fines des fonctions holomorphes.

Dans sa thèse, Jacqueline Ferrand donne une nouvelle preuve de l'invariance conforme des bouts premiers, qui met en évidence le rôle joué par l'aire balayée par la transformation conforme f dans le contrôle de la longueur de l'image de presque toute courbe par f. D'autre part, le fait que f est ouverte permet de passer de presque toute courbe à toute courbe et donc de majorer le module de continuité de f, [2].

Les estimations précises obtenues conduisent à des conditions suffisantes sur le domaine D' pour que la représentation conforme ait des limites le long de courbes contenues dans le disque et ayant un contact d'ordre élevé avec le bord du disque. Sous des hypothèses plus fortes, elle montre l'existence de la "dérivée angulaire"

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-a}{z-a}.$$

en un point a du bord, [l].

Pour une bijection conforme (ou holomorphe), l'aire de l'image coïncide avec l'intégrale de Dirichlet

$$\int_D |f'(z)|^2 dz.$$

Pour une fonction harmonique u (partie réelle d'une fonction holomorphe f), l'intégrale de Dirichlet remplace l'aire de f et le principe du maximum remplace le fait que f est ouverte. Les méthodes développées pour les représentations conformes s'étendent donc à l'étude au bord des fonctions harmoniques, et aussi des fonctions surharmoniques, [4].

Fonctions préholomorphes

L'article [3] développe une discrétisation de la notion de fonction holomorphe. Il s'agit, étant donné $h > 0$, de remplacer le plan $\mathbb{C}$ (ou un domaine borné D' de $\mathbb{C}$) par le sous-ensemble fini Z_h des points de D' dont les parties réelle et imaginaire sont des multiples entiers de h. Classiquement, on décrète qu'une fonction sur Z_h est harmonique (J. Ferrand parle de fonctions *préharmoniques*) si pour tout point z dans Z_h,

$$4u(z) = u(z+h) + u(z-h) + u(z+ih) + u(z-ih).$$

Il est moins classique de discrétiser l'équation des fonctions holomorphes. Jacqueline Ferrand appelle fonction *préholomorphe* une fonction f à valeurs complexes sur Z_h qui vérifie pour tout z de Z_h,

$$f(z+ih) - f(z+h) = i(f(z+h+ih) - f(z)).$$

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction préholomorphe sont des fonctions préharmoniques sur les deux sous-réseaux

$$Z'_h = \{z \in Z_h\,;\ (Re(z) + Im(z))/h \text{ est pair}\}$$

et

$$Z''_h = \{z \in Z_h\,;\ (Re(z) + Im(z))/h \text{ est impair}\}.$$

Inversement, toute fonction préharmonique sur Z_h est la partie réelle d'une fonction préholomorphe sur Z_h. J. Ferrand montre que lorsque le pas h tend vers 0, les fonctions préholomorphes sur Z_h convergent vers des fonctions holomorphes sur le domaine D'. Les estimées a priori de module de continuité le long du bord jouent à nouveau un rôle essentiel.

Elle en déduit une preuve très simple du théorème de représentation conforme des domaines non simplement connexes (voir [5] chapitre V). *Soit D' un domaine plan dont le bord possède au moins une composante connexe isolée non réduite à un point. Alors il existe une représentation conforme essentiellement unique de D' sur un rectangle privé de segments parallèles à l'un de ses côtés.*

La notion de fonction préholomorphe a donné lieu à de nombreux développements, Ch. Mercat (2007).

Actions de groupes

À l'occasion d'un séjour à l'Institute for Advanced Study de Princeton, Jacqueline Ferrand se demande quand une action d'une algèbre de Lie sur une variété s'intègre en une action de groupe. Il en sort une caractérisation d'analyse fonctionnelle de la complétude d'un champ de vecteurs, [6].

Soit ξ un champ de vecteurs localement Lipschitzien, à divergence nulle, sur une variété M munie d'un élément de volume ω. Alors ξ est complet si et seulement si l'opérateur différentiel $i\xi$ s'étend en un opérateur autoadjoint de $L^2(\omega)$. Supposons que ξ engendre un groupe à un paramètre d'isométries de M. Ce groupe est périodique si et seulement si l'opérateur $i\xi$ est d'image fermée.

Ce résultat particulièrement élégant n'a pas reçu beaucoup d'écho.

Ouvrages d'enseignement

La production mathématique de Jacqueline Ferrand connaît une baisse de régime entre 1958 et 1968. À cette époque, Jacqueline Ferrand est mère de quatre jeunes enfants (nés en 1949, 1951, 1952 et 1958). Elle s'investit dans l'enseignement à l'université, rédigeant une série de cours polycopiés qui, à force de travail, deviennent des livres. Un cours de géométrie différentielle (second cycle) paraît chez Masson en 1963. Ses cours de premier cycle paraissent chez Armand Colin en 1964, Dunod en 1967. Dunod publiera au cours des années 1970 la série d'ouvrages avec Jean-Marie Arnaudiès qui couvre l'ensemble du programme des premiers cycles universitaires (cours et exercices), et qui est encore utilisée dans les classes préparatoires.

Géométrie riemannienne

C'est à l'issue de cette période que Jacqueline Ferrand obtient ses résultats les plus connus, qui lui vaudront de donner une conférence invitée au Congrès International des Mathématiciens à Vancouver en 1974. Il s'agit de la résolution d'un problème de géométrie riemannienne posé par André Lichnérowicz en 1964, et sur lequel de nombreuses réponses partielles avaient été publiées.

Une transformation conforme d'un ouvert de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme dont la différentielle préserve les angles. Cette notion se généralise aux ouverts de $\mathbb{R}^n$ munis d'une métrique riemannienne, i.e, d'un produit scalaire dépendant du point, aux sous-variétés de l'espace euclidien, puis aux variétés riemanniennes abstraites. Le prototype d'une variété riemannienne compacte est la sphère

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

La projection stéréographique réalise un difféomorphisme conforme de la sphère privée d'un point sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Par transport, les similitudes de $\mathbb{R}^n$ deviennent des difféomorphismes conformes de la sphère. On voit ainsi que le groupe des transformations conformes de la sphère est non compact.

Théorème 1. *Si une variété riemannienne compacte M a un groupe de transformations conformes non compact, alors M est conforme à la sphère, [7].*

Il s'agit d'estimer *a priori* le module de continuité d'une transformation conforme, en dimension quelconque cette fois. Utilisons l'invariant conforme de 4 points introduit dans [8]. La définition que nous donnons dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ s'étend immédiatement aux variétés riemanniennes.

Définition 2. *Soient F_0, F_1 deux compacts connexes disjoints de $\mathbb{R}^n$. La* capacité $\mathrm{cap}(F_0, F_1)$ *est la borne inférieure des intégrales $\int |du|^n$ pour toutes les fonctions lisses u sur $\mathbb{R}^n$ telles que $u = 0$ sur F_0 et $u = 1$ sur F_1.*

Soient x, y, z, t quatre points de $\mathbb{R}^n$. L'*invariant de Ferrand* $j(x, y, z, t)$ est la borne inférieure des capacités des couples $(F_0,\, F_1)$ de compacts connexes tels que F_0 contient x et z et F_1 contient y et t.

En utilisant une estimation *a priori* du module de continuité des fonctions u qui minimisent $\int |du|^n$ (une généralisation non linéaire et n-dimensionnelle de [2]), J. Ferrand montre que cette borne inférieure est non nulle. En fait (voir [11], complété par [13]), à z et t fixés,

$$d(x, y) = j(x, y, z, t)^{1/(1-n)}$$

est une distance qui définit la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n \setminus \{z, t\}$ et qui tend vers l'infini si à y fixé x tend vers z.

Pour donner une première idée de l'utilisation faite de l'invariant j, montrons que, dans une variété riemannienne quelconque, le groupe G des transformations conformes qui fixent 3 points y, z et t est compact. En effet, G agit par isométries pour la métrique d et fixe le point y, donc toute suite d'éléments de G a une sous-suite qui converge C^0 vers un homéomorphisme. Il reste à montrer que la limite est un difféomorphisme conforme, et que la convergence est C^∞. C'est un théorème de régularité elliptique non linéaire, dû à F. Gehring et Yu. Reshetnjak dans le cas euclidien, et étendu par J. Ferrand au cas des variétés riemanniennes, [10].

On peut tirer davantage de l'invariant j. Si une suite f_i de transformations conformes diverge, alors pour toutes suites x_i, z_i, t_i, si $f_i(z_i)$ converge vers z et $f_i(t_i)$ converge vers t distinct de z, alors $f_i(x_i)$ converge vers z ou vers t. Cela signifie qu'il y a au plus deux limites possibles z et t. Si z est distinct de t, alors, quitte à extraire, f_i envoie le complémentaire de tout voisinage de z dans des voisinages arbitrairement petits de t. Cela entraîne que la variété M est simplement connexe et sa métrique conformément plate, donc M est conforme à la sphère.

Transformations quasiconformes

Comment J. Ferrand a-t-elle découvert son invariant de 4 points ?

L'idée d'utiliser une métrique naturellement invariante sous les transformations conformes remonte à A. Lichnérowicz en 1964. Lichnérowicz utilise les métriques à courbure scalaire constante. Dans les années 60, cette approche était limitée par le fait que le problème de Yamabe, existence et/ou unicité d'une métrique à courbure scalaire constante conforme à une métrique riemannienne donnée, n'était que partiellement résolu. Le résultat essentiel obtenu depuis est un pendant analytique du résultat de [7], dû à R. Schoen (consulter sa contribution au Jubilee do Carmo, 1988). Soit (M, g) une variété riemannienne compacte non conforme à la sphère standard. Alors l'ensemble des métriques conformes à g, à courbure scalaire constante, est compact.

L'idée de métrique naturellement invariante a été développée dans la catégorie holomorphe par S. Kobayashi (voir son livre de 1970), avec un grand succès. S'il est vraisemblable que [8] ait été influencé par les travaux de S. Kobayashi, la construction de ce dernier diffère essentiellement de celle de J. Ferrand. La transcription exacte de la définition de la métrique de Kobayashi à la catégorie conforme (nécessairement limitée aux variétés conformément plates) a été développée par R. Kulkarni et U. Pinkall en 1994.

Il faut plutôt rechercher l'inspiration de J. Ferrand dans la théorie des transformations quasiconformes inaugurée par H. Grötsch en 1928. Voici la définition que donne L. Ahlfors en 1930. Un *quadrilatère* est un domaine plan bordé par une courbe de Jordan portant 4 points marqués x, z, y, t. Un tel domaine admet une représentation conforme sur un rectangle qui envoie les points marqués sur les sommets. Ce rectangle est unique à similitude près. Le rapport de deux côtés consécutifs est un invariant conforme du quadrilatère donné, appelé *module*. Un homéomorphisme f entre domaines plans est dit K-quasiconforme si pour tout quadrilatère Q,

$$K^{-1}\mathrm{module}(Q) \leqslant \mathrm{module}(f(Q)) \leqslant K\mathrm{module}(Q).$$

Noter que le module d'un rectangle est exactement la moitié de la capacité de deux côtés opposés. En dimension 2, la définition de J. Ferrand est donc très proche de l'idée de L. Ahlfors.

Un homéomorphisme entre domaines plans est quasiconforme si et seulement si il envoie les petites boules sur des domaines d'excentricité bornée, consulter à ce sujet le livre de J. Väisälä (1971). Cette notion garde un sens sur un espace métrique quelconque. M. Gromov, à la suite de G.D. Mostow et G.A. Margulis, a mis en évidence le rôle que jouent les transformations quasiconformes en théorie des groupes : le bord à l'infini d'un groupe hyperbolique possède une structure quasiconforme. Ceci motive des travaux dus à J. Heinonen, P. Koskela, A. Koranyi et M. Reimann (1995), où on étudie la régularité de transformations quasiconformes sur des espaces métriques de plus en plus généraux. Le point essentiel dans ces travaux reste l'estimation de l'invariant de Ferrand. Dans une certaine mesure, la notion d'espace de Loewner, dégagée par J. Heinonen, caractérise les espaces dont l'invariant de Ferrand est non trivial. L'invariant de Ferrand joue un rôle crucial dans les travaux de M. Bourdon et H. Pajot (2000) qui établissent la rigidité quasi isométrique de certains immeubles hyperboliques, et dans ceux de M. Bonk et

B. Kleiner (2002) qui donnent une caractérisation de la sphère standard à quasi-symétrie près.

M. Gromov a soulevé le problème de savoir ce qu'il restait de la théorie quasi-conforme en dimension infinie. Cela motive la recherche d'estimations de l'invariant de Ferrand indépendantes de la dimension, voir [11].

L'invariant de Ferrand exploite l'invariance conforme de l'intégrale $\int |du|^n$. En un sens qu'on va préciser, ces intégrales déterminent entièrement la structure conforme. À la suite de H. Royden, J. Ferrand attache une famille d'algèbres de Banach à une variété riemannienne M. Étant donné $p > 1$, notons $A_p(M)$ l'espace des fonctions continues bornées sur M dont les dérivées partielles au sens des distributions sont des fonctions de puissance p-ième intégrable. $A_p(M)$ est une algèbre de Banach pour la norme $\|u\|_\infty + \|du\|_p$.

Dans [9], J. Ferrand montre que, *si $p = n$, tout isomorphisme $A_n(M) \to A_n(N)$ est induit par une transformation quasiconforme $M \to N$.* En revanche, *si $p \neq n$, tout isomorphisme $A_p(M) \to A_p(N)$ est induit par un homéomorphisme bilipschitzien $M \to N$.* V. Goldstein et M. Rubin (1995) ont un résultat qui va dans le même sens. M. Bourdon (2007) a étendu ces idées aux bords d'espaces métriques hyperboliques.

J. Ferrand va plus loin. Elle caractérise les applications $M \to N$ qui envoient $A_p(N)$ dans $A_p(M)$, pour $p > n$. Le cas où $p < n$ a été abordé par V. Goldstein, L. Gurov et A. Romanov (1995).

Structures géométriques de type fini

Le problème de Lichnérowicz a une généralisation aux variétés non compactes. On dit qu'un groupe G de transformations conformes d'une variété riemannienne (M, g) est *inessentiel* s'il préserve une métrique riemannienne g' conforme à g (i.e. proportionnelle à g en chaque point). La question devient : montrer qu'une variété riemannienne non compacte dont le groupe conforme est essentiel est conforme à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. D.V. Alekseevski en a publié une solution dès 1972. C'est seulement en 1992 que R. Zimmer et K. Gutschera ont trouvé une faille importante dans la preuve d'Alekseevski.

Voici le contexte qui a amené R. Zimmer à étudier le problème de Lichnérowicz. Dans son adresse au congrès de Berkeley, R. Zimmer s'intéresse aux actions de groupes non compacts sur des variétés compactes, du point de vue des systèmes dynamiques. Si toute variété admet une action ergodique de $\mathbb{R}$, il semble que seules des variétés compactes très spéciales admettent une action ergodique d'un groupe de Lie semi-simple (consulter à ce propos l'adresse de F. Labourie au congrès de Berlin). Ces groupes portent en eux-même une géométrie (voir le programme d'Erlangen de F. Klein) qu'ils transportent sur les variétés sur lesquelles ils agissent, ce qui restreint les possibilités de structures géométriques invariantes.

Appelons *structure géométrique d'ordre r* sur une variété M la donnée d'une réduction du fibré des repères d'ordre r à un sous-groupe algébrique du groupe $Gl_n(r)$ des r-jets de difféomorphismes fixant l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Une structure géométrique est *de type fini* si tout automorphisme est déterminé par son jet d'ordre fini. Par exemple, une métrique (pseudo)-riemannienne, une structure conforme, projective, est une structure de type fini. Une structure symplectique ou complexe ne l'est pas.

Un problème passionnant et actuel est l'étude des variétés compactes munies de structures géométriques de type fini qui admettent un groupe non compact d'automorphismes. Un pas important a été accompli par M. Gromov en 1988. Il montre que si le groupe d'automorphismes a une orbite dense, alors celle-ci est ouverte. Les objets cherchés sont donc homogènes "presque partout". Il en résulte par exemple que le groupe d'isométries d'une variété compacte munie d'une métrique lorentzienne analytique réelle est toujours compact (D'Ambra 1988). Pour les structures conformes, le problème est entièrement résolu par [7]. Ch. Francès et C. Tarquini ont obtenu des généralisations de ce beau résultat.

L'assertion d'Alekseevski qui a attiré l'attention de R. Zimmer est la suivante. Si G est un groupe fermé d'automorphismes d'une variété M munie d'une structure géométrique de type fini, et si les stabilisateurs de tous les points sont compacts, alors G agit proprement sur M. Dans cette généralité, l'énoncé est faux. Dans le cas particulier d'une structure conforme, il est équivalent à la conjecture de Lichnérowicz généralisée, qui a été résolue finalement par Jacqueline Ferrand, [12], ainsi que sa version quasiconforme, [14]. La solution utilise un invariant de 3 points, obtenu à partir de l'invariant de 4 points en faisant tendre un point vers l'infini. D'autres invariants obtenus par passage à la limite sont introduits dans [15]. Après ce dernier texte, complété par un survol de l'histoire de la conjecture de Lichnérowicz, Jacqueline Ferrand a délibérément posé sa plume mathématique (elle avait 80 ans).

Conclusion

Les travaux de Jacqueline Ferrand ont eu une influence sensible dans plusieurs branches des mathématiques. Pourtant, ils sont peu connus en France. Elle n'a pas cherché à fonder une école. Comme elle l'a dit avec modestie, elle a hésité à entraîner des jeunes sur des pistes qu'elle jugeait insuffisamment prometteuses. Jacqueline Ferrand a mené quelques collaborations à l'étranger, notamment en Finlande où elle jouit d'une grande considération. Toutefois, son itinéraire intellectuel est principalement solitaire. La valeur de ses travaux n'a été pleinement reconnue que lorsque l'actualité mathématique l'a rejointe, ce qui s'est produit en 1942 au moment de sa thèse, en 1969 avec le problème de Lichnérowicz et à nouveau en 1996. L'énergie qu'elle a mise, à 80 ans, à démontrer le théorème qui répond à la question de Lichnérowicz, force l'admiration. Jacqueline Ferrand est décédée le 26 avril 2014 à Sceaux.

Sélection de publications de Jacqueline Ferrand

[1] Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière. Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **59**, 43–106 (1942).

[2] Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme. Bull. Soc. Math. de France **70**, 143–174 (1942).

[3] Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes. Bull. Sci. Math. **68**, 152–180 (1944).

[4] Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace. Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **66**, 125–158 (1949).

[5] Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée. Cahiers Scientifiques, Fasc. **12**, Gauthier-Villars, Paris (1955).

[6] Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable. Bull. Soc. Math. de France **86**, 1–26 (1942).

[7] Transformations conformes et quasiconformes des variétés riemanniennes compactes. Mém. Acad. Royale Belgique **39**, 1–44 (1971).

[8] Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes. J. Differen. Geom. **8**, 487–510 (1973).

[9] Étude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions. Duke Math. J. **40**, 163–186 (1973).

[10] Geometrical interpretation of scalar curvature and regularity of conformal homeomorphisms. P. 91–105 in "Differential Geometry and Relativity", M. Cahen and M. Flato eds., D. Reidel, Dordrecht (1976).

[11] avec G. Martin and M. Vuorinen, Lipschitz conditions in conformally invariant metrics. J. d'Analyse Math. **156**, 187–210 (1991).

[12] The action of conformal transformations on Riemannian manifolds. Math. Ann. **304**, 277–291 (1996).

[13] Conformal capacities and extremal metrics. Pacific. J. Math. **172**, 89–97 (1996).

[14] Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds. J. Analyse Math. **69**, 1–24 (1996).

[15] Generalized condensers and conformal properties of Riemannian manifolds with at least two ends, pages 27–46, précédé de Histoire de la réductibilité du groupe conforme des variétés riemanniennes (1964–1994), pages 9–25. Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. **17**, Année 1998–1999, Sémin. Théor. Spectr. Géom., 17, Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères (1999).