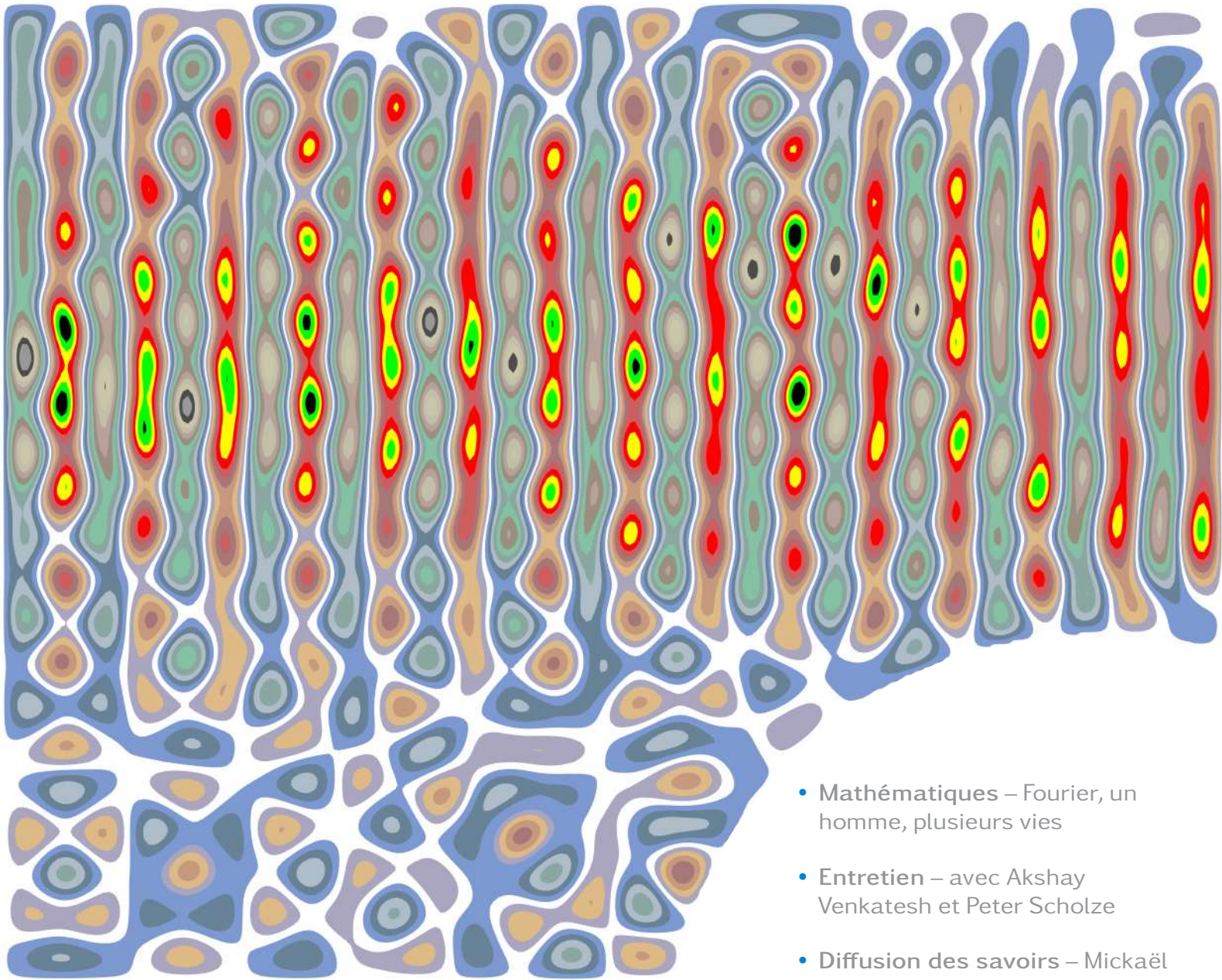


# la Gazette

des Mathématiciens



- **Mathématiques** – Fourier, un homme, plusieurs vies
- **Entretien** – avec Akshay Venkatesh et Peter Scholze
- **Diffusion des savoirs** – Mickaël Launay, montreur de mathématiques
- **Raconte-moi...** l'arbre modulaire de  $SL_2(\mathbb{Z})$

## Comité de rédaction

### Rédacteur en chef

**Boris ADAMCZEWSKI**

Institut Camille Jordan, Lyon  
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

### Rédacteurs

**Thomas ALAZARD**

École Normale Supérieure de Paris-Saclay  
thomas.alazard@cmla.ens-cachan.fr

**Maxime BOURRIGAN**

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles  
maxime.bourrigan@gmail.com

**Christophe ECKÈS**

Archives Henri Poincaré, Nancy  
eckes@math.univ-lyon1.fr

**Damien GAYET**

Institut Fourier, Grenoble  
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

**Sébastien GOUËZEL**

Université de Nantes  
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

**Sophie GRIVAUX**

Université de Lille  
grivaux@math.univ-lille1.fr

**Fanny KASSEL**

IHÉS  
kassel@ihes.fr

**Pauline LAFITTE**

École Centrale, Paris  
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

**Romain TESSERA**

Université Paris-Sud  
romain.tessera@math.u-psud.fr

### Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ  
Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris cedex 05  
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96  
gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



**À propos de la couverture.** La figure de la couverture représente les valeurs d'une fonction propre pour l'opérateur laplacien, s'annulant sur le bord du « domaine de la Gazette » (un rectangle auquel on a soustrait un disque). Physiquement cela correspond à une onde stationnaire quantique, acoustique ou électromagnétique dans cette cavité. D'après l'analyse semi-classique, ces fonctions propres sont liées au billard formé par ce domaine. Celui de la Gazette est dispersif : le disque crée une sensibilité aux conditions initiales, ce qui implique une dynamique ergodique. Selon le théorème d'ergodicité quantique, la plupart des fonctions propres s'équidistribuent alors dans ce domaine. Il pourrait y avoir des exceptions comme le suggère cette figure qui montre une concentration sur une trajectoire périodique horizontale. Le calcul numérique a été effectué par Frédéric Faure de l'Institut Fourier, en C++ avec les bibliothèques root du CERN et armadillo. (crédit : Frédéric FAURE).

N° 158

## Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

Afin de cheminer sans encombre à travers ce numéro de rentrée, tu devras cette fois t'en remettre à ta propre sagacité, et le cas échéant au sommaire qui figure en page 4. En effet, ceci étant mon dernier éditorial (ouf!), j'ai pour ma part quelques remerciements à adresser. De ces quatre années en tant que rédacteur en chef, je dois bien avouer que je tire une grande satisfaction. Non pas une fierté personnelle bien sûr, mais la joie d'avoir participé à une entreprise collective qui, à bien des égards, m'a permis d'enrichir ma connaissance de notre communauté. Toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance d'échanger ont invariablement fait preuve de bonne volonté et je ne peux faire autrement aujourd'hui que de leur témoigner ma reconnaissance avec la plus grande sincérité, même si cela doit, quelque peu tragiquement, m'exposer à la prédiction cynique d'Oscar Wilde « A little sincerity is a dangerous thing, and a great deal of it is absolutely fatal ».

L'histoire débute le 18 décembre 2013, en plein championnat du monde de handball féminin qui se déroulait en Serbie. Dans un courriel, Valérie Berthé me demandait ce que je pensais de l'idée de devenir rédacteur en chef de la *Gazette*. La SMF amorçait une évolution profonde et l'un des chantiers en cours avait pour but de moderniser notre chère *Gazette*. En soufflant mon nom et, bien au-delà, en m'encourageant constamment, Valérie me précipitait dans l'une des plus stimulantes aventures de mon parcours de mathématicien, me donnant, une fois encore, l'occasion de lui être infiniment redevable. Marc Peigné, alors président de la SMF, m'a tout de suite témoigné sa confiance et offert la plus grande liberté. C'est d'ailleurs ce qui m'a poussé à accepter ce projet. Bernard Helffer, qui officiait comme rédacteur en chef par interim, s'est également montré bienveillant et m'a mis le pied à l'étrier. Après quelques mois émaillés de réunions auxquelles participait un petit groupe de réflexion, et après avoir décortiqué les résultats d'un sondage proposé aux adhérents de la SMF, le cahier des charges prit forme : mise en place d'un nouveau format en couleur, d'une nouvelle équipe de rédaction et une refonte du contenu. Les idées fleurissaient...

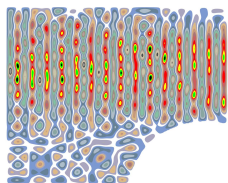
Je me rappelle très bien de ma première rencontre avec Nathalie Lozanne, graphiste en charge d'établir la future maquette de la *Gazette*. J'avais acheté dans un kiosque quelques magazines tendance, que je trouvais particulièrement élégants, afin de montrer l'esprit que je souhaitais donner. Évidemment, le budget de la *Gazette* est limité, l'organisation reste familiale et les collaborateurs bénévoles. La mise en page doit être simple et efficace. Nous avons donc opté pour un style plutôt minimaliste. Denis Bitouzé est ensuite venu nous prêter main forte en développant une classe  $\text{\LaTeX}$  dédiée à la *Gazette* et donner ainsi corps à nos idées. Cette confrontation à une réalité budgétaire et informatique quelque peu brutale a nécessité un certain nombre de compromis et la phrase « tout n'est pas possible », qu'une bagarre à l'école primaire m'avait valu de copier un grand nombre de fois, m'est souvent revenue à l'esprit. Drôle de mantra. Néanmoins, nos efforts se sont vu récompensés par la naissance de notre nouvelle *Gazette* en janvier 2015. Parée de ses belles couvertures!

Il me semble important de rappeler que la *Gazette* ne fonctionne pas comme une revue académique classique. Qu'il s'agisse de mathématiques à proprement parler, ou bien de diffusion des savoirs, de questions de parité, ou de tout autre sujet, les articles publiés dans la *Gazette* émanent en grande majorité de suggestions des membres du comité de rédaction. Ces derniers se creusent les méninges pour trouver des sujets stimulants, ainsi que des auteurs habiles dans l'exercice de vulgarisation. Puis, bien souvent, il leur revient d'harcéler ces mêmes auteurs afin d'obtenir le fruit de leur labeur en temps et en heure. Ainsi, chaque numéro est façonné collégialement par une petite équipe d'artisans mathématiciens. Et si mon travail a été aussi agréable durant ces années, cela est principalement dû à l'extrême compétence de celle-ci. Je remercie donc celles et ceux qui ont fait partie de ce comité lors des cinq dernières années pour leur investissement bénévole, leurs idées foisonnantes, et bien sûr pour l'ambiance conviviale et décontractée qui prévaut lors de nos réunions à l'IHP. Les déjeuners au Comptoir du Panthéon ou dans le jardin du Luxembourg, lorsque le temps parisien se montre suffisamment clément, sont toujours un moment de plaisir. Tout au long de mon passage en tant que rédacteur en chef, Claire Ropartz a été un relai constant et indispensable au bon fonctionnement de la *Gazette* et je sais à quel point nous lui sommes redevables. Je n'oublie pas non plus Frédérique Petit, que je n'ai malheureusement jamais eu la chance de croiser, mais dont j'ai pu apprécier le travail titanesque de relecture. Enfin, j'adresse un salut amical et reconnaissant à toutes celles et ceux qui ne comptent pas leur temps pour rédiger des textes et faire vivre notre *Gazette*.

Dans le mythe de Sisyphe, Albert Camus écrit « Insistons encore sur la méthode : il s'agit de s'obstiner. ». C'est l'esprit empreint de confiance que je transmets à présent le flambeau à Damien Gayet, lui souhaitant, ainsi qu'à ses successeurs, l'énergie nécessaire pour s'obstiner à leur tour et faire de cette Gazette le compagnon de route que notre communauté mérite.

En te souhaitant une agréable lecture,

Boris ADAMCZEWSKI



N° 158

## Sommaire

<b>SMF</b>	<b>5</b>
Mot du président	5
<b>MATHÉMATIQUES</b>	<b>7</b>
Fourier, un homme, plusieurs vies – <i>B. MAUREY</i>	7
Autour de l'ergodicité quantique – <i>M. INGREMEAU</i>	25
Mouvements locaux et algorithmique des nœuds, d'après Lackenby – <i>A. de MESMAY</i>	33
<b>ENTRETIEN</b>	<b>42</b>
... avec Akshay VENKATESH	42
... avec Peter SCHOLZE	44
<b>DIFFUSION DES SAVOIRS</b>	<b>46</b>
Mickaël LAUNAY, montreur de mathématiques	46
M@ths en-vie, un dispositif pour ancrer les mathématiques au réel – <i>C. CORTAY et C. GILGER</i>	52
<b>PARITÉ</b>	<b>57</b>
Quelques notes autour d'un atelier sur les femmes en mathématiques – <i>J. BOUCARD et I. LÉMONON</i>	57
<b>RACONTE-MOI</b>	<b>67</b>
l'arbre modulaire de $SL_2(\mathbb{Z})$ – <i>F. DAHMANI</i>	67
<b>TRIBUNE LIBRE</b>	<b>72</b>
À propos de la candidature de la France (Paris) à l'icm 2022 – <i>M. LEDOUX</i>	72
<b>INFORMATION</b>	<b>75</b>
Un bilan de la candidature de Paris à l'organisation d'icm 2022	75
Rapport sur les sessions du cnu 25 pour l'année 2017	76
Un prix en optimisation : le prix Jean-Jacques Moreau	79
<b>CARNET</b>	<b>81</b>
Michel Mendès France – <i>J.-P. ALLOUCHE et J. SHALLIT</i>	81
Bernard Morin – <i>D. FOATA</i>	83
<b>LIVRES</b>	<b>84</b>



N° 158

## Mot du président

Chères et chers collègues,

Ce début d'année scolaire est marqué, au moins dans mon université, par un afflux d'étudiants qui ont franchi l'étape *Parcoursup* et se sont inscrits dans les filières scientifiques. Les cours que nous leur dispensons sont-ils adaptés à leur formation pré-baccalauréat ? Comment les amener au niveau requis par une licence de mathématiques, ou une licence scientifique ? Comment les préparer aux concours d'enseignement (quel que soit le degré), à la recherche (pour une partie de ces étudiantes et étudiants) et plus généralement les armer pour qu'ils intéressent les employeurs, et ainsi valoriser la formation en mathématiques ?

Dans le contexte de la réforme du baccalauréat et des programmes de lycée, du plan licence et de la réforme à venir sur le positionnement et donc les pré-requis des concours de recrutement de professeurs, une nécessaire consultation et un partage d'expérience sont nécessaires. La voix des sociétés savantes, et donc de ses adhérentes et adhérents, devra être entendue : nous sommes celles et ceux qui enseignent effectivement à l'université et dans le supérieur. La SMF, comme d'autres associations, va continuer à consulter ses correspondants locaux pour que vous nous fassiez part de vos initiatives et de vos retours d'expérience. Nous publions régulièrement des textes, disponibles sur notre site web notamment, qui reflètent nos demandes et parfois nos inquiétudes sur les évolutions et réflexions en cours sur les réformes : n'hésitez pas à les consulter régulièrement, et à nous transmettre votre avis.

Préparer à la recherche et au travail en équipe, c'est précisément le but du concours SMF junior, qui aura lieu du 26 octobre au 4 novembre prochain : 10 sujets originaux et variés attendent les équipes d'étudiantes et d'étudiants, venant de toute la France et même d'Afrique (le concours sera proposé dans plusieurs pays avec le soutien d'Animath, que je remercie). Le jury regardera toutes les solutions proposées, et s'attachera à récompenser les idées originales. Parlez-en à vos classes et à vos responsables de master !

Enfin, je suis heureux de vous annoncer que la SMAI et la SMF ont décidé, sous le parrainage de l'Académie des sciences, de créer un prix récompensant tous les deux ans des mathématiciennes et mathématiciens de l'optimisation et de la décision. Ce prix portera le nom de Jean-Jacques Moreau, disparu en

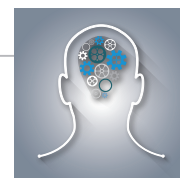
2014, mathématicien et mécanicien français ayant apporté des contributions exceptionnelles en mécanique non régulière et en analyse convexe. Il sera décerné à partir de 2019 (tous les deux ans), il est dès à présent possible d'envoyer des dossiers de candidature recommandant une ou un collègue.

Bien à vous,

Le 2 octobre 2018

Stéphane SEURET, président de la SMF





## Fourier, un homme, plusieurs vies

• B. MAUREY

Fourier est né il y a 250 ans, vingt-et-un ans avant 1789. Les événements de cette époque troublée ont fait de sa vie un roman d'aventures : la Révolution et ses dangers mortels, l'expédition de Bonaparte en Égypte et ses découvertes, puis la carrière de préfet de l'Isère, écrivant les premières versions de la *Théorie analytique de la chaleur* quand il ne s'occupait pas de la construction de la route de Grenoble à Turin ou de l'assèchement des marais de Bourgoin ; enfin, l'académicien, bien établi au cœur de la scène scientifique parisienne des années 1820-1830. En rapportant ici sur ces aspects multiples qui ne touchent pas qu'à la science, il faudra évidemment faire une place importante à la théorie de la chaleur, son œuvre majeure, et aux séries de Fourier qui en sont un élément mathématique crucial.

### Des ouvrages

De nombreux auteurs ont écrit sur Fourier, notamment à partir de la deuxième moitié du xx<sup>e</sup> siècle où plusieurs documents inédits ont été publiés. Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert ont fait un travail colossal [10] que je n'ai pas hésité à piller, au prix de simplifications souvent abusives. Un nouvel ouvrage, sous la direction de Dhombres, doit paraître cette année [21] ; il visera un public plus large, contiendra un grand nombre d'illustrations et des pièces nouvelles d'archives. Ivor Grattan-Guinness a publié dans son livre de 1972 [16] le contenu du mémoire *Sur la propagation de la chaleur* présenté par Fourier à l'Académie des Sciences en décembre 1807 et resté jusque-là inédit. Umberto Bottazzini [9] a consacré deux sections<sup>1</sup> à l'étude du problème de la chaleur dans les années 1800-1830. Je me référerai également au livre de Jean-Pierre Kahane et Pierre Gilles Lemarié-Rieusset [23] dont la première partie, écrite par Kahane, traite de l'histoire des séries de Fourier. Le traité d'Analyse harmonique de Thomas Körner [24] expose de façon magistrale les mathé-

matiques attachées au nom de Fourier. Il contient aussi deux courts chapitres sur la vie de Fourier<sup>2</sup>, qui s'appuient en grande part sur le texte de John Herivel [18], très riche en informations mais en anglais : les documents français originaux y sont traduits.

### 1. La Révolution, l'Égypte

Jean-Baptiste Joseph Fourier naît le 21 mars 1768 à Auxerre, il est prénommé *Jean-Joseph* sur son acte de baptême. Il naît dans une famille d'artisans en voie d'ascension sociale : son père, tailleur, emploie une petite dizaine d'ouvriers. Orphelin à dix ans, Jean-Joseph est pris en charge par le clergé auxerrois ; il a un lien de parenté lointain – et incertain – avec un prêtre béatifié, on ne peut le laisser à l'abandon. Il reçoit une bonne éducation à l'École Royale Militaire d'Auxerre, tenue par des religieux. Après l'école, à 19 ans, il fait une demande pour être autorisé à passer le concours d'entrée dans l'Artillerie : elle est sèchement refusée, « Fourier n'étant pas noble » ne saurait devenir officier d'artillerie. Il se tourne vers les ordres et devient novice à l'abbaye bénédictine de Fleury, à Saint-Benoît-sur-Loire. Il y séjourne deux ans, de 87 à 89, il aurait pu être *l'abbé Fourier* : mais la Révolution a éclaté, et l'Assemblée nationale constituante a pris des décrets suspendant la prononciation de vœux religieux, juste avant qu'il ne prononce les siens en novembre 89. Au début 90, il revient à l'école d'Auxerre, comme enseignant cette fois ; à cette date, elle s'appelle « Collège National-École Militaire », il va y rester quatre ans. Il enseignera des matières diverses, histoire, philosophie, éloquence et finalement mathématiques, et deviendra « instituteur salarié par la nation ».

D'abord réservé à l'égard de la Révolution, Fourier s'engage début 93 dans le *Comité de surveillance* d'Auxerre, il en sera même président en juin 94. Il est présent, sans que nous puissions savoir ce qu'il

1. [9, sec. 2.3, 2.4]

2. [24, part VI, ch. 92 et 93]

en pense, lors de scènes violentes de désacralisation d'églises, pendant la vague de déchristianisation de 93-94. Après septembre 93, le Comité d'Auxerre se trouve chargé d'exécuter les décisions de Maximilien de Robespierre et du Comité de Salut Public. Plutôt modéré, Fourier peut s'y trouver en danger, par son manque de zèle à aider les coupeurs de têtes : Victor Cousin, son successeur à l'Académie française en 1831, a rapporté dans des *Notes additionnelles à l'éloge de M. Fourier* – bien des années après les faits – que celui-ci aurait sciemment fait échouer l'arrestation à Tonnerre d'un homme condamné à l'échafaud<sup>3</sup> ; Fourier a tout de même signé un certain nombre de mandats d'arrêts, dans le cadre de ses fonctions officielles au comité d'Auxerre. Un événement va le conduire tout près de l'emprisonnement, « l'affaire d'Orléans », qui est relatée en grand détail dans le livre de Herivel<sup>4</sup>.

Début octobre 93, le citoyen Ichon, membre de la Convention, est dépêché pour collecter dans l'Yonne et six départements voisins, armes, matériel et chevaux en vue des opérations en Vendée. Dans ce but, il mandate six citoyens d'Auxerre – dont Fourier – pour une mission d'un mois, à partir de mi-octobre, à Orléans. La ville est agitée par de vives tensions entre sans-culottes et bourgeois. Le citoyen Laplanche, autre Conventionnel, y a été envoyé par Paris début septembre ; il commence par prendre des mesures de caractère révolutionnaire, susceptibles de satisfaire les sans-culottes. Mais il cède ensuite à des pressions des milieux les plus riches et il se heurte aux « leaders » des sans-culottes. S'opposant à Laplanche, et sortant nettement du cadre de sa mission, Fourier prend parti pour ces « gauchistes », dirait-on de nos jours. Laplanche et les autorités orléanaises demandent alors à Auxerre qu'il soit rapplé, et dénoncent son comportement ; leur plainte remonte à Paris. Un décret parisien destitue Fourier de toutes ses fonctions le 29 octobre 93 : « La Commission donnée [...] au citoyen Fournier [sic], est révoquée ; le citoyen Fournier est déclaré inhabile à recevoir de pareilles Commissions » ; il ne peut plus exercer de fonction publique. Ichon, qui est responsable de son envoi à Orléans, ressent une partie du blâme ; furieux, il lance un mandat d'arrêt contre Fourier, qui heureusement pour lui n'est pas encore rentré ; les choses sont un peu calmées à son retour à Auxerre, on le laisse tranquille. Cependant, l'affaire d'Orléans finit par ressortir à Paris. Robespierre combat sa gauche aussi bien que sa droite, les meneurs

d'Orléans sont visés et Fourier par voie de conséquence : le 19 juin 94, le *Comité de Sûreté Générale* ordonne son arrestation (ce même mois de juin, la loi de « Grande Terreur » est adoptée). On sait aujourd'hui [21] que Fourier ne va pas en prison, il bénéficie d'un traitement de faveur : il est placé en résidence surveillée le 4 juillet, à son domicile d'Auxerre. Robespierre tombe fin juillet et Fourier est « libéré » le 11 août.

Fin 94, Fourier est sélectionné pour faire partie des jeunes enseignants qui seront formés par la toute nouvelle École normale, « l'École Normale de l'an III » ; cette école ne fonctionnera qu'un semestre, de janvier à juin 95, il en sera un élève distingué. Mais suite au changement de climat politique, son appartenance au comité jacobin lui vaut d'autres ennuis. À l'heure de la réaction thermidorienne, on fait la chasse aux « terroristes ». Les nouvelles autorités d'Auxerre veulent obtenir son exclusion de l'École normale ; on lui reproche son passé, dans une adresse à la Convention Nationale<sup>5</sup> :

Nous frémissons, Représentans, quand nous pensons que les Élèves des écoles normales ont été choisis sous le règne de Robespierre et par ses protégés ; il n'est que trop vrai que Balme et Fourrier [sic] élèves du département de l'Yonne ont longtemps proféré les principes atroces et les infernales maximes des tyrans.

Début juin 95, Fourier est mis en prison ; il obtient un ordre de libération conditionnelle après quelques jours, mais l'ordre n'est pas appliqué, il reste incarcéré un mois ou plus. Il est en tout cas libre fin août, ses ennuis judiciaires sont enfin terminés et il est rétabli dans tous ses droits de citoyen.

Les premières années de la Révolution ont été dangereuses, sans doute exaltantes toutefois. Kahane<sup>6</sup> cite un passage d'une lettre de Fourier :

À mesure que les idées naturelles d'égalité se développèrent on put concevoir l'espérance sublime d'établir parmi nous un gouvernement libre exempt de rois et de prêtres, et d'affranchir de ce double joug la terre d'Europe depuis si longtemps usurpée.

Pourtant Fourier doit beaucoup à l'éducation reçue des bénédictins à l'École Royale Militaire d'Auxerre, qui lui permet d'écrire de fort belles

3. [10, ch. III, p. 94]

4. [18, sec. 2.2]

5. [10, ch. IV, p. 150]

6. [23, ch. 1, p. 8]

phrases comme celle qu'on vient de citer, et qui a fait de lui un enseignant. L'extrait précédent provient d'une longue lettre adressée à l'été 95 à Edmé-Pierre-Alexandre Villetard, député de l'Yonne (reproduite par Dhombres et Robert<sup>7</sup>), au moment mentionné ci-dessus où Fourier, mis en cause, tente de justifier son comportement des années 93-94.

Élève emblématique de l'École normale, il s'y fait connaître de Gaspard Monge, il suit également des cours de Pierre-Simon Laplace et de l'éminent Joseph-Louis Lagrange, « le premier des savants d'Europe », écrit Fourier dans des Notes sur l'École Normale<sup>8</sup>. Laplace, savant reconnu sous l'Ancien Régime, a dû se faire discret pendant la Terreur; en 95, il commence à remonter sur le devant de la scène et sera bientôt très influent. Fourier indique dans ses Notes qu'il suit aussi les cours de physique de René-Just Haüy, ceux de chimie de Claude-Louis Berthollet et ceux du naturaliste – fort âgé – Louis Jean-Marie d'Aubenton (je ne cite que les plus connus). Au moment de la fermeture de l'École normale, Fourier passe du côté des enseignants de l'École polytechnique (nous écrivons « l'École » tout court, à partir de maintenant; elle s'est appelée *École Centrale des Travaux Publics* avant septembre 95): recommandé par Monge, il devient *substitut* fin mai 95 à l'École – sa mission alors est d'encadrer le travail des élèves –, puis instituteur-adjoint en octobre 95. Il s'investit pleinement dans ses fonctions d'enseignant de mathématiques, pendant plus de deux années.

On a une idée des cours que Fourier a donnés en 1796-1797 à partir de notes prises par des élèves<sup>9</sup>, conservées à l'Institut de France et à l'École des Ponts et Chaussées<sup>10</sup>. Ces cours ne s'appuient pas sur les manuels du XVIII<sup>e</sup> siècle (le traité d'Étienne Bézout par exemple), mais sont plutôt inspirés des cours donnés à l'École normale par Lagrange et Laplace; on y sent aussi l'esprit géométrique de Monge. Dès novembre 95, Fourier est chargé du cours d'*Analyse algébrique*, qui prépare au cours de calcul différentiel; il assure en janvier 96 une partie du cours d'Analyse de Prony, incluant le calcul des variations; en mars 96, il montre aux élèves l'existence des racines complexes des polynômes au moyen de la méthode présentée par Laplace à l'École normale [26]. Cette preuve originale de Laplace s'applique au cas des coefficients réels; elle met le degré  $n$  du polynôme sous forme  $n = 2^i s$  où  $s$  est impair, et procède

par une récurrence subtile sur  $i$ , le cas  $i = 0$  étant réglé par la propriété des valeurs intermédiaires – qui passe pour une évidence –. Fourier simplifie et généralise un peu: si on admet que les polynômes à coefficients complexes de degré impair ont une racine complexe, on peut les factoriser en facteurs complexes du premier degré. En mai 96, il traite le calcul différentiel et intégral. En 97, il succède à Lagrange à la chaire d'Analyse et Mécanique. Titulaire, il aurait pu comme d'autres y passer de longues années, mais les événements politiques vont détourner le cours de son existence.

L'expédition d'Égypte est un épisode saillant dans la vie de Fourier. Au début 98, les autorités du *Directoire exécutif* lui enjoignent de prendre part à une opération entourée de beaucoup de secret: à ce moment, peu de ses membres en connaissent la destination exacte. Fin mars 98, il quitte Paris, comme un bon nombre d'élèves ou d'anciens de l'École, des promotions de 94 – la première – à 97, qui ont pu l'avoir pour enseignant. Jean-Baptiste Prosper Jollois et Édouard de Villiers du Terrage (« Devilliers » à l'École, Révolution oblige), ingénieur et futur ingénieur des Ponts et Chaussées, âgés de 22 et 18 ans, sont parmi eux<sup>11</sup>; ils écriront quantité de pages de l'ouvrage monumental *Description de l'Égypte* qui paraîtra à partir de 1809 et consignera, dans les textes et illustrations de nombreux collaborateurs, les découvertes de l'expédition; Fourier écrira une longue préface. Les illustrateurs comptent Vivant Denon et Henri-Joseph Redouté (peintre, frère de Pierre-Joseph Redouté qui est connu pour ses aquarelles représentant des roses). Des savants et ingénieurs, comme Monge, Berthollet, Étienne Geoffroy Saint-Hilaire, Nicolas-Jacques Conté, Pierre-Simon Girard sont aussi du voyage. De retour en France, Girard, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, dirigera la construction du canal de l'Ourcq; il y aura sous ses ordres en 1809 le jeune Augustin Louis Cauchy, 20 ans, aspirant ingénieur des Ponts et Chaussées.

Fourier s'embarque à Toulon mi-mai. Un corps expéditionnaire de plus de 30000 hommes part de France et d'Italie. La campagne d'Égypte ne sera pas une promenade tranquille: parmi beaucoup d'autres victimes, plusieurs jeunes polytechniciens n'en reviendront pas – 7 sur 42<sup>12</sup> –. L'expédition débarque à Alexandrie début juillet. Début août, à Rosette (lieu de découverte de la fameuse *Pierre* en juillet 99, à

7. [10, Annexe IV, p. 709]

8. [10, Annexe II]

9. [10, ch. IV, p. 158]

10. [16, ch. 1, p. 6-7]

11. ils sont représentés dans [7]; Fourier en est absent.

12. [27, annexe]

quelque 50 km d'Alexandrie), Fourier devient responsable du *Courrier de l'Égypte*, un journal dont une des missions est de promouvoir l'action du général en chef Napoléon Bonaparte. Fin août 98, il est nommé Secrétaire perpétuel de l'Institut d'Égypte créé au Caire par Bonaparte. Il joue un rôle d'administrateur et un rôle politique, en particulier de négociateur avec les autorités locales. Dhombres et Robert signalent qu'au moment où Bonaparte se lance en Syrie (février-juin 99), Fourier se trouve de fait à gouverner la Basse-Égypte, sans en avoir officiellement le titre. Quand Bonaparte, et Monge, retournent en France en août 99, il reste la principale autorité civile, particulièrement après la mort du général Jean-Baptiste Kléber, assassiné au Caire en juin 1800, dont il prononce l'éloge funèbre (Fourier sait écrire les discours, et il parle bien). Il se charge du lien entre les civils et les militaires de l'expédition. Il négocie encore à la fin de l'aventure, cette fois avec les Anglais qui tiennent les ports égyptiens, pour obtenir que les savants français puissent repartir dans les meilleures conditions possibles, en gardant l'essentiel de leurs notes et découvertes, au moment de la reddition du général Menou en septembre 1801. Mais la pierre de Rosette partira pour l'Angleterre; elle y est toujours.

L'activité de Fourier en Égypte ne se limite pas à l'administration et à la politique. En octobre 98, il se fait examinateur de l'École polytechnique : il interroge avec Monge des élèves de la promotion 96 venus en Égypte. Il participe à des expéditions scientifiques et archéologiques, notamment en Haute-Égypte en septembre-octobre 99. Il effectue des recherches mathématiques, présente plusieurs communications à l'Institut d'Égypte, sur des sujets algébriques, travaux plutôt mineurs et restés inédits, et un *Mémoire sur l'analyse indéterminée*, jugé plus convaincant par Dhombres-Robert [10] et Grattan-Guinness [16] qui y voient une ébauche de ce que nous appelons la *programmation linéaire*. Fourier reprendra cette question beaucoup plus tard, dans des mémoires à l'Académie des Sciences en 1823 – pour simplifier, nous désignerons par *Académie des Sciences* l'institution qui s'est appelée aussi *Académie Royale des Sciences* ou *Classe des Sciences de l'Institut* – et dans un article de 1826 au *Bulletin des Sciences, par la Société philomathique*.

13. [16, p. 24, fin du ch. 1]

14. [9, Note<sup>(2)</sup>] pour le ch. 2]

15. [16, ch. 1, p. 24]

## 2. Grenoble, Paris, l'œuvre

De retour d'Égypte, Fourier débarque à Toulon en novembre 1801; rentré à Paris début janvier 1802, il revient très brièvement à l'École. Mais Bonaparte l'envoie à Grenoble, le nommant préfet de l'Isère en février 1802, à la mort du préfet en poste Gabriel Ricard; Fourier ne refuse pas, il y arrive mi-avril. C'était peut-être en partie une brimade, cependant, il fallait aussi pour occuper cette fonction un homme capable et sûr, des qualités démontrées en Égypte. À Grenoble, il commence à travailler sur la théorie de la chaleur et écrit en 1805 un essai non publié, une sorte de brouillon de la théorie. Fin 1807, il présente à l'Académie un premier mémoire sur la propagation de la chaleur. Les quatre rapporteurs, inscrits au procès-verbal de la séance du 21 décembre, sont Lagrange, Laplace, Monge et Sylvestre Lacroix. Le texte n'est pas bien reçu par Lagrange<sup>13, 14</sup>, un peu mieux par Laplace qui, dans un mémoire de 1809-1810 [25], reconnaîtra à Fourier la paternité de l'équation de la chaleur.

Ce mémoire de 1807 de Fourier, resté inédit, a été publié et commenté par Grattan-Guinness en 1972 [16]; il était conservé à l'École nationale des Ponts et Chaussées, où Claude Louis Marie Henri Navier, proche de Fourier, a été professeur. Navier a été « exécuteur testamentaire » des manuscrits de Fourier. Gaston Darboux, l'éditeur des *Œuvres* de Fourier (parues en 1888 et 1890), avait découvert le mémoire à la fin des années 1880 mais ne l'avait pas exploité. Jointes au « Mémoire » se trouvaient des documents transmis par Fourier à l'Académie en 1808 et 1809 : on comprend qu'il a été informé des objections des « examinateurs » et qu'il y a répondu; parmi ces documents figurent un *Extrait* soumis en 1809 (dont seules les dix premières pages ont été conservées), courte présentation non mathématique du contenu du mémoire, et un ensemble de dix pages de *Notes* répondant aux objections<sup>15</sup>.

L'Académie reste silencieuse sur le travail présenté par Fourier en 1807. Un compte rendu assez froid, écrit par Siméon Denis Poisson, paraît en mars 1808 au *Bulletin des Sciences*, il mentionne l'équation de la chaleur mais pas le traitement par les séries « de Fourier ». En 1809, Fourier finit de rédiger la *Préface Historique* de la *Description de l'Égypte*; cette rédaction lui pèse, à un moment où la chaleur occupe son esprit, où il voudrait voir son

mémoire de 1807 reconnu. La Préface, document sensible de 90 pages, est soumise à la lecture de Napoléon. Fourier « monte » à Paris pour la lui présenter : il a dû se faire historien pour rapporter sur l'histoire de l'Égypte, ancienne et contemporaine, styliste pour livrer un texte qu'il puisse estimer irréprochable, et diplomate pour savoir parler *comme il fallait* de l'action en Égypte de celui qui est devenu l'Empereur. Körner rapporte qu'un égyptologue de ses connaissances juge que cette *Préface* représente « a masterpiece and a turning point in the subject »<sup>16</sup>, et que cet égyptologue a été surpris d'apprendre que l'auteur était également assez connu en tant que mathématicien ! Afin de réaliser sa tâche, Fourier a reçu l'aide de Jacques-Joseph Champollion-Figeac, féru d'égyptologie ; son jeune frère Jean-François, né en 1790, élève en 1804 au *lycée impérial* institué à Grenoble la même année, est passionné de langues anciennes ; il participe (un tout petit peu) à la préparation de la *Préface*. Jean-François Champollion déchiffra les hiéroglyphes à partir de 1822 ; mort en 1832, il est enterré – selon son souhait – près de Fourier au Père-Lachaise (et Fourier, lui, est enterré non loin de Monge).

En 1811, Fourier remanie sensiblement son texte de 1807 et obtient, enfin, un prix de l'Académie en janvier 1812. Lagrange est toujours là pour s'opposer (mais il meurt l'année suivante) : le rapport décernant ce prix n'est pas sans réserves, « [...] la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et [...] son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur ». Bien qu'honoré par le prix, Fourier est blessé, il proteste auprès du secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques, Jean-Baptiste Joseph Delambre, mais il n'y a pas grand-chose à faire. Et les années qui suivent amènent de grands bouleversements politiques qui vont occuper et toucher le préfet de l'Isère : 1814 et 1815 voient le premier départ de Napoléon, puis son retour de l'île d'Elbe et sa chute.

Après la défaite de Napoléon en Russie, c'est le territoire français qui est menacé dès la fin de 1813 par une coalition comprenant principalement l'Angleterre, l'Autriche, la Prusse et la Russie. Henry Beyle, 30 ans, qui n'est pas encore l'écrivain Stendhal, est attaché à la section de la guerre du Conseil d'État ; il est envoyé dans le Dauphiné en novembre 1813 afin de seconder le *commissaire extraordinaire* chargé

des mesures à prendre pour la protection de la région. En janvier 1814, Grenoble craint l'arrivée des troupes autrichiennes qui ont pris Genève. Avec les militaires et avec Stendhal, le préfet doit organiser la défense. Stendhal n'apprécie pas Fourier, qui selon lui temporise et entrave l'action militaire ; il aura des mots très méprisants sur ce préfet : « Une des sources de mon ennui à Grenoble était le petit savant spirituel à l'âme parfaitement petite et à la politesse basse de domestique revêtu, nommé Fourier »<sup>17</sup>. Paris tombe le 31 mars, Napoléon abdique le 6 avril ; le 12 avril, il signe le traité de Fontainebleau et se met en route vers son nouveau royaume, l'île d'Elbe. Les troupes autrichiennes sont à Grenoble, Fourier et l'essentiel des membres de sa préfecture se rallient à la « première Restauration » le 16 avril. Sur son chemin, Napoléon passe près de Grenoble, au grand embarras de Fourier, qui va rester presque un an encore à son poste de préfet.

En 1815, au retour de l'île d'Elbe, Napoléon entre à Grenoble et Fourier en sort pour l'éviter ; après l'avoir suspendu et menacé d'arrestation le 9 mars, Napoléon se ravise et le nomme préfet du Rhône le 11 mars. Fourier se remet au travail à son nouveau poste, mais finit par refuser d'appliquer les mesures d'épuration de Napoléon et de son ministère de l'Intérieur – le ministre est Lazare Carnot – ; il est révoqué le 3 mai 1815.

À la seconde Restauration, la pension de Fourier est supprimée : il est trop marqué comme serviteur du régime napoléonien, en particulier par sa participation aux Cent Jours. Il reçoit alors un appui bienvenu du préfet de la Seine, Gaspard Chabrol de Volvic. Chabrol est un ancien élève de l'École (promotion 94), qui a eu Fourier pour professeur et qui était de plus présent en Égypte ; il était déjà préfet de la Seine sous Napoléon, mais il n'a pas participé aux Cent Jours et il restera à ce même poste jusqu'en 1830. Chabrol confie à Fourier la direction d'un bureau de statistiques du département de la Seine. Fourier s'adonne à cette tâche avec intérêt et publie des *Recherches statistiques sur la Ville de Paris et le département de la Seine*, en quatre volumes parus entre 1821 et 1829. Il ne s'agit pas – loin s'en faut – de travaux théoriques de probabilités ou statistiques du niveau de ceux de Laplace, mais Körner, encore lui, mentionne que certains démographes ne connaissent de Fourier que l'homme qui a joué un rôle important dans le développement des statistiques gouvernementales en France<sup>18</sup>.

16. [24, fin du ch. 92]

17. [10, ch. VI, p. 347]

18. [24, fin du ch. 93]

En 1817, les bouleversements politiques étant amortis, Fourier est élu académicien, après une première candidature et une élection en 1816 qui n'a pas été validée par le roi Louis XVIII. Il devient secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences cinq ans plus tard, à la mort de Delambre. Académicien de premier plan, il a l'occasion d'être en contact avec Sophie Germain, ils échangent une correspondance assez régulière entre 1820 et 1827; il lui procure des places pour assister aux séances publiques de l'Institut, lui apporte son soutien contre Poisson, qui travaille aussi sur la théorie des surfaces élastiques; elle le soutient pour le poste de secrétaire perpétuel en 1822. On peut penser que Laplace, sur ses vieux jours (il a 73 ans en 1822), s'est rapproché de Fourier et l'a également soutenu. Fourier prononcera un éloge funèbre de Laplace (mort en 1827), encore un beau discours. En 1822, il fait éditer la version définitive de la *Théorie analytique de la chaleur*; le mémoire de 1811 finit par paraître, en 1824! Il est élu à l'Académie française en 1826; les réactions ne sont pas unanimes: son œuvre littéraire, il est vrai, est un peu mince.

La fin de la vie de Fourier a été rendue pénible par la maladie. Il souffrait de rhumatisme chronique (à Grenoble déjà), et avait peut-être contracté une affection tropicale en Égypte; il était devenu extrêmement frileux, Grattan-Guinness<sup>19</sup> plaisante: « [illness] caused him to discourage the diffusion of heat in his quarters », au point qu'il portait des vêtements épais en laine et chauffait en toute saison. Pendant ces années, il a été absent de bien des séances de l'Académie. Ses derniers mois ont été particulièrement difficiles, il devait passer ses journées dans une chaise spéciale<sup>20</sup> où il pouvait toutefois travailler. La maladie a pu aussi amoindrir ses facultés intellectuelles, au moment où le *secrétaire perpétuel* aurait dû mieux s'occuper du fameux mémoire d'Évariste Galois, présenté en 1829 puis en 1830. Fourier meurt le 16 mai 1830 à Paris, à l'âge de 62 ans.

Pour nous, Fourier est essentiellement l'homme d'une œuvre unique, la théorie de la chaleur. Il a publié d'autres travaux moins connus, parmi lesquels des mémoires sur la statique en 1798 (un article de mécanique rationnelle, contenant trois preuves du principe des puissances virtuelles, utilisant la notion de moment), sur les statistiques entre 1821 et 1829; il a laissé une masse de manuscrits, beaucoup se trouvent à la Bibliothèque nationale. Un thème en

particulier doit être mentionné: Fourier a poursuivi, sur une très longue période, des recherches sur la détermination du nombre des racines réelles d'un polynôme qui sont situées dans un segment donné, et sur les méthodes de calcul de valeurs approchées de ces racines. La question l'intéressait déjà en 1787, et même au cours de ses jeunes années [21]; il a présenté une communication à l'Académie le 9 décembre 1789 sur ce sujet, sujet dont il parlait aussi dans ses cours à l'École en 1796 et 1797, sur lequel il travaillait encore en Égypte, puis à Grenoble en 1804: ces précisions sont données par Navier, voir plus bas. Fourier a publié dans la même direction plusieurs articles à partir de 1818, soumis des mémoires à l'Académie pendant les années 1820-1830. Ses recherches mènent à une borne supérieure pour le nombre des racines; Jacques Charles-François Sturm trouve en 1829 la règle qui porte son nom (le mémoire paraît en 1835) et qui permet de trouver le nombre exact des racines; Sturm déclare: « le théorème dont le développement est l'objet de ce Mémoire a beaucoup d'analogie avec celui de Fourier ».

Dans ses dernières années, Fourier prépare un ouvrage intitulé « Analyse des équations déterminées » qu'il ne pourra pas terminer, et qui devait rassembler en deux volumes les travaux algébriques mentionnés ci-dessus. Navier en publiera les parties existantes en 1831, il écrira un « Avertissement de l'éditeur » de 24 pages destiné à affirmer la priorité de Fourier sur des résultats vieux de plus de quarante ans pour certains. Navier cite les documents en sa possession: il insiste sur un manuscrit *Recherches sur l'algèbre*, d'avant 1789, dû à Fourier (mais pas de sa main, et incomplet: seules étaient conservées les 28 premières pages), mentionne des notes prises par un élève aux cours de Fourier à l'École en 1797, puis un texte écrit à Grenoble en 1804. Navier insiste aussi sur l'existence de témoignages permettant de dater chacun de ces documents. La priorité était contestée par François Budan de Boislaurent, docteur en médecine en 1803, inspecteur général de l'Instruction Publique en 1808, mathématicien compétent quoiqu'« amateur »: il avait soumis un mémoire à l'Académie en 1803, publié un article en 1807 et un livre en 1822 sur la même question du nombre des racines<sup>21</sup>. La querelle a été très vive, elle paraît secondaire aujourd'hui; si la méthode analytique de Fourier a conduit au résultat de Sturm, celle de Budan, combinatoire et de nature algorithmique, a

19. [16, fin du ch. 22]

20. [16, fin du ch. 22]

21. voir Jacques Borowczyk [8]

trouvé de nos jours des répercussions en calcul formel.

### 3. Des séries trigonométriques

Fourier évidemment n'a pas inventé les séries trigonométriques : Leonhard Euler, Daniel Bernoulli et bien d'autres les ont utilisées avant lui ; il faut peut-être partir de Brook Taylor, l'homme de la *formule de Taylor*, et un des premiers à avoir lié vers 1715 la vibration des cordes aux courbes sinusoïdes, appelées à l'époque « compagnes de la cycloïde ». Mais Fourier en a donné de beaux exemples, et surtout, il a systématisé la relation entre fonction et série « de Fourier » ; ce faisant, il a contribué à modifier et préciser la conception des fonctions en mathématiques, une tâche complétée quelque vingt ans plus tard par Dirichlet. Fourier a calculé un bon nombre de développements en série trigonométrique de fonctions  $2\pi$ -périodiques non nécessairement continues, dont plusieurs se trouvent déjà dans son essai de 1805 : il a retrouvé le développement de la fonction égale à  $x$  quand  $|x| < \pi$ , mentionnant bien sûr qu'il était dû à Euler, et précisant clairement qu'il fallait en limiter la validité à  $|x| < \pi$ <sup>22</sup> ; il a développé en série de sinus la fonction impaire qui vaut  $\cos x$  pour  $0 < x < \pi$  (un fait qui choquera Lagrange et même Laplace), ou la fonction égale à  $\operatorname{sh} x$  pour  $|x| < \pi$ , et beaucoup d'autres. En lisant le livre de Grattan-Guinness [16] on se rend compte de l'ampleur du contenu mathématique des travaux de Fourier sur la chaleur. Je vais insister maintenant sur l'exemple sans doute le plus connu.

Après avoir posé des principes physiques pour comprendre l'évolution de la température des corps et établi *l'équation de la chaleur* à l'intérieur d'un solide,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \Delta v, \quad \kappa > 0,$$

Fourier propose<sup>23</sup> de déterminer explicitement la température d'équilibre  $v(x, y, z)$  dans un solide infini limité par deux plans parallèles et un troisième perpendiculaire aux deux autres, en supposant que la température soit fixée au bord. Le solide est mis en équation de sorte que la géométrie et la température ne dépendent pas de la coordonnée  $z$  : on se ramène à un problème en  $x, y$  à l'art. 165, une lame rectangulaire, qu'on modélise comme l'ensemble  $\{(x, y) : x \geq 0, |y| \leq \pi/2\}$ . Au bord, la température  $v$  est égale à 1 quand  $x = 0$  et  $|y| < \pi/2$ , égale à 0 quand

$x \geq 0$  et  $|y| = \pi/2$ . L'équation d'équilibre dans la lame est  $\Delta v = 0$ . La condition au bord étant paire en  $y$ , Fourier recherche des solutions paires en  $y$  : il envisage une solution combinaison de fonctions  $e^{-kx} \cos(ky)$ , où la nullité de  $v$  dans le cas  $|y| = \pi/2$  impose que  $k$  soit un entier impair, et où on a  $k > 0$  pour des raisons de vraisemblance physique<sup>24</sup>. La méthode des variables séparées était déjà apparue chez Jean d'Alembert et Euler, la superposition (même d'une infinité) de solutions chez Bernoulli. Fourier cherche donc  $v$  sous la forme

$$v(x, y) = a e^{-x} \cos y + b e^{-3x} \cos 3y + c e^{-5x} \cos 5y + \dots$$

La condition  $v = 1$  pour  $x = 0$  lui fait rechercher un développement qui vérifie

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + \dots \quad (1)$$

quand  $|y| < \pi/2$ . Il va déterminer d'abord le coefficient  $a$  de  $\cos y$ , puis il trouvera pareillement les coefficients suivants  $b, c, \dots$ . Afin d'y parvenir, il dérive l'équation (1) un nombre pair de fois et écrit pour  $j$  entier  $> 0$  l'égalité

$$0 = a \cos y + b 3^{2j} \cos 3y + c 5^{2j} \cos 5y + \dots \quad (2)$$

Pour calculer les coefficients, Fourier suppose pour commencer qu'il n'y a que  $m$  inconnues  $a, b, \dots, r$ , et il considère un système de  $m$  équations, la première provenant de (1) et les  $m - 1$  dernières, quand  $j = 1, \dots, m - 1$ , étant

$$0 = a \cos y + b 3^{2j} \cos 3y + c 5^{2j} \cos 5y + \dots + r(2m - 1)^{2j} \cos(2m - 1)y.$$

Prenant  $y = 0$ , il obtient un système de Vandermonde, le résout pour trouver une valeur approchée  $a^{(m)}$  de la solution  $a$ , et il passe à la limite avec  $m$  en faisant appel à la formule du produit de Wallis qui fournit  $a = 4/\pi$ .

Entrons un peu plus dans les détails. Écrivant  $x_1, \dots, x_m$  au lieu de  $a, b, \dots, r$ , et posant  $k_i = (2i - 1)^2$ ,  $i = 1, \dots, m$ , les  $m$  équations considérées par Fourier sont

$$k_1^j x_1 + k_2^j x_2 + \dots + k_m^j x_m = \delta_{j,0}, \quad j = 0, \dots, m - 1,$$

où  $\delta_{j,0}$  est le symbole de Kronecker. Fourier travaille « à la main » au long de quatre pages de calculs, mais nous pouvons de notre côté utiliser la règle de Cramer, qui exprime  $x_1$ , la valeur approchée  $a^{(m)}$  à

22. par exemple [15, art. 184]

23. [15, ch. III, art. 163, p. 159 et suiv.]

24. [14, art. 33], à lire dans [16, p. 138]