

# SOMMAIRE DU N° 136

---

Avant-propos, <i>S. Jaffard, S. Seuret</i> .....	3
Repères biographiques .....	7
L'universalité des formes fractales dans la nature, <i>B. Sapoval</i> .....	9
Ma rencontre avec Benoît Mandelbrot, <i>M. Mendes-France</i> .....	21
Le mouvement brownien fractionnaire, <i>M.S. Taqqu</i> .....	23
Le sage qui nous a appris à redécouvrir la beauté de la nature, <i>M.-O. Coppens</i> .....	31
Souvenirs des années 80, <i>C. Tricot</i> .....	43
Objets fractals et art, <i>J.-P. Allouche</i> .....	55
$\mathbb{B}^2\mathbb{M}$ & $\mathbb{M}\mathbb{B}$ : Benoît B. Mandelbrot et le mouvement brownien, <i>B. Duplantier</i> .....	61
Benoît comme catalyseur, un cas, <i>J.-P. Kahane</i> .....	115
Cascades infiniment divisibles, <i>R. Riedi</i> .....	119
Benoît Mandelbrot et la turbulence, <i>U. Frisch</i> .....	131
Le fabuleux destin des cascades de Mandelbrot, <i>J. Barral, J. Peyrière</i> .....	135
Benoît Mandelbrot et la modélisation mathématique des risques financiers, <i>R. Cont</i> ..	159
Benoît Mandelbrot: always a student, <i>M. Frame</i> .....	169

Apprenti bétourné, *B.B. Mandelbrot* .....181



*Benoît Mandelbrot (1924-2010) (© Collections École polytechnique).*



---

## Avant-propos

Stéphane Jaffard, Stéphane Seuret

---

**B**ENOÎT Mandelbrot nous a quittés le 14 octobre 2010 à l'âge de 85 ans, à Cambridge (Massachusetts), tout près de l'université de Yale, dont il était toujours un membre actif. Père de la géométrie fractale, ses nombreuses idées ont essaimé dans un très grand nombre de sciences, mettant en évidence des passerelles auparavant insoupçonnées entre des domaines scientifiques extrêmement divers. À notre époque, où un nombre de plus en plus élevé de grands défis scientifiques se situe au niveau des interactions entre les mathématiques et les autres disciplines, la *Gazette* se devait de rendre hommage à ce scientifique universel, mathématicien dont la vision a perpétuellement bousculé les frontières entre différents mondes, et différentes manières de penser. Dans cette introduction, nous donnons quelques éléments bibliographiques succincts. Ceux-ci ne sauraient bien sûr pas remplacer l'autobiographie [3] que B. Mandelbrot avait à peu près terminée.

B. Mandelbrot est né en Pologne le 20 novembre 1924, dans une famille d'origine lituanienne, qui émigra à Paris quand Benoît eut 11 ans. Il y retrouva son oncle, Szolem Mandelbrojt, lui-même éminent mathématicien (il fut l'un des fondateurs du groupe Bourbaki) et professeur au Collège de France. Celui-ci a eu une forte influence sur le développement scientifique de son neveu. Par exemple, il attira son attention sur les articles de Fatou et Julia concernant l'itération des polynômes complexes, qui conduisent aux fameux ensembles de Fatou et de Julia (nous y reviendrons).

Après des classes préparatoires à Lyon, puis à Paris, il entra à l'École Polytechnique en 1944. La préférence à l'École Normale Supérieure n'était alors pas anodin : c'était un choix délibéré de la diversité scientifique et des interactions avec les autres disciplines pour manifester sa différence avec l'esprit bourbakiste. Sa scolarité à l'X a également eu une importance décisive dans ses futurs choix : ses enseignants furent Gaston Julia, titulaire de la chaire de géométrie, mais aussi Paul Lévy, qui fut une de ses principales sources d'inspiration. En effet, le premier avait mis en évidence les ensembles « fractals » qui portent son nom et que Benoît étudia ultérieurement. Ses travaux sur ces ensembles fractals de Julia, qui sont parmi les plus célèbres, lui permirent de comprendre l'importance de l'ensemble qui, à son

---

STÉPHANE JAFFARD, STÉPHANE SEURET, LAMA, Université Paris Est Créteil.

tour, portera son nom, l'ensemble de « Mandelbrot ». Cet ensemble le fascina, tant par les problèmes mathématiques qu'il posait que par les illustrations informatiques qu'il en obtenait grâce à des algorithmes très simples. L'ensemble de Mandelbrot est aujourd'hui encore la source de beaucoup de problèmes mathématiques (notamment en systèmes dynamiques), et par sa « beauté » la source de nombreuses inspirations artistiques, parfois ésotériques. Paul Lévy, lui, fut l'un des artisans principaux de la théorie des processus aléatoires, et on sait l'importance du rôle que joua B. Mandelbrot en probabilités, par exemple dans la popularisation du mouvement brownien fractionnaire ou l'introduction des processus et du chaos multiplicatifs. Paul Lévy fut également un modèle car il était, comme B. Mandelbrot le devint plus tard, un esprit non conformiste parmi les mathématiciens français de l'époque. L'un comme l'autre privilégiaient dans leur recherche l'intuition géométrique (parfois au détriment de la rigueur mathématique, ce qui leur fut souvent reproché...), et aimaient créer leurs propres objets et concepts mathématiques. B. Mandelbrot a d'ailleurs, à dessein, inventé le mot « fractal », mot sous lequel sont désignés aujourd'hui tous les phénomènes, mathématiques ou autres, qui présentent des propriétés d'auto-similarité et/ou de rugosité; le mot même « fractal » est assez général : nom propre, commun ou adjectif, invariable ou non, l'usage en est assez libre, comme il l'a sûrement voulu. B. Mandelbrot effectua ensuite un master d'aéronautique à Caltech, puis revint en France pour effectuer une thèse, soutenue le 16 décembre 1952, dont le sujet est : « Contribution à la théorie mathématique des communications ». La première partie concerne la linguistique mathématique, et la seconde la thermodynamique statistique. Selon ses propres mots, la première partie est une forme très exotique de la seconde.

Dès ses premiers travaux, il s'intéressa aux phénomènes en loi de puissance, qui furent l'un des fils directeurs de ses travaux postérieurs : citons par exemple le célèbre article [2], dans lequel il met en évidence des lois de puissance dans le calcul de la longueur des côtes océanes, et relie l'exposant de cette loi à plusieurs notions théoriques de dimension fractionnaire. Après un post-doc à Princeton, encadré par J. Von Neumann, puis de brefs séjours en France et à Genève, il passa l'essentiel de sa carrière en dehors des positions académiques, au Centre de recherche Thomas J. Watson d'IBM, à partir de 1958, ce qui lui donna accès aux moyens de calcul et de visualisation les plus performants de l'époque (avec, par exemple, les premières représentations de l'ensemble de Mandelbrot). Il devint « IBM fellow » en 1974, ce qui lui permit de mener ses recherches en toute liberté. Il termina sa carrière comme professeur à Yale, et fut actif et toujours enthousiaste jusqu'au dernier jour.

B. Mandelbrot fut un pionnier de l'utilisation de l'informatique comme outil d'expérimentation mathématique. Ses travaux ont ouvert de nouvelles perspectives à plusieurs branches des mathématiques (systèmes dynamiques, processus aléatoires,...). Mais son apport le plus spectaculaire fut sans doute de comprendre la portée de certains concepts (comme la notion de dimension fractionnaire et celle de l'auto-similarité) dont l'utilisation était avant lui cantonnée à des domaines très cloisonnés des mathématiques fondamentales. Dans ses mains, ils deviendront des outils d'investigation d'une immense portée, et lui permettront de dévoiler des correspondances insoupçonnées entre des parties de la Science aussi diverses que l'astronomie (structure fractale de la répartition de masse dans l'univers), la géographie (longueur de la côte de Bretagne, et loi de puissance d'innombrables phénomènes) et donc l'hydrologie (études des crues), la turbulence, la physique des matériaux

(bords de rupture fractals), la géologie (modélisation de la rugosité), la chimie (électrodes fractales), la biologie (avec l'exemple très médiatique du chou-fleur Romanesco!), la médecine (structure fractale du poumon), l'économie (modélisation des données boursières), la statistique (phénomènes à longue dépendance, lois à queues lourdes), le traitement du signal et de l'image, l'environnement (propagation des incendies de forêts) ou encore la linguistique.

Ainsi, en 2004, le mathématicien Peter Jones, également professeur à l'université de Yale, écrivait en préface à un des volumes où sont rassemblées les œuvres de B. Mandelbrot [1] :

« It is only 23 years since B. Mandelbrot published his famous picture of what is now called the Mandelbrot set. The graphics available at that time seem primitive today, and Mandelbrot's working drafts were even harder to interpret. But how that picture has changed our views of the mathematical and physical universe! Fractals, a term coined by Mandelbrot himself, are now so ubiquitous in the scientific consciousness that it is difficult to remember the psychological shock of their arrival. [...] To understand Mandelbrot's contributions to science, one must first give up the tendency to find a disciplinary pigeonhole for every scientist. What should one call someone who works simultaneously in mathematics, physics, economics, hydrology, geology, linguistics...? And what should one think of someone whose method of entry into a field was often to find puzzling patterns, pictures, and statistics? The former could not be a scientist, and the latter could not be science! [...] The Mandelbrot set  $M$  offers an instructive example. Despite twenty years of intensive research by the world's best analysts, we still do not know whether  $M$  is locally connected (the MLC conjecture), and progress on this problem has rather ground to a halt. This is now seen as one of the most central problems of complex dynamics, and the solution would have many deep consequences. The geometry of  $M$  is known to be devilishly complicated; M. Shishikura proved that the boundary has dimension equal to two. [...] It is also known that MLC implies both the Fatou conjecture for quadratics and the nonexistence of certain (but not all) Julia sets of positive area. »

Citons quelques-unes de ses percées les plus célèbres : son article [2] met en évidence l'ubiquité des fractales dans la nature. Celui sur les crues du Nil (en collaboration avec J. van Ness) mettra le mouvement brownien fractionnaire (initialement construit par N. Kolmogorov) au cœur de la modélisation en traitement du signal. Les propriétés d'invariance d'échelle sont d'ailleurs un concept central de cette discipline. Les « cascades de Mandelbrot » servent à modéliser la turbulence ; ses travaux dans ce domaine montrèrent que ce type de modèles conduit à une dissipation d'énergie portée par un ensemble fractal. La résolution de la célèbre « conjecture de Mandelbrot », selon laquelle la frontière extérieure d'une trajectoire brownienne plane a un bord de dimension  $4/3$ , est l'un des résultats les plus spectaculaires obtenus par Greg Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner (médaille Fields 2006), et est lié à des résultats profonds en physique (le rapport avec la gravité quantique a été établi par Bertrand Duplantier). Sa critique iconoclaste des modèles utilisés en mathématiques financières, très mal acceptée par les spécialistes de la discipline, s'est en fait révélée prémonitoire. Ces quelques exemples ne donnent qu'un trop bref aperçu de l'ouverture de son champ scientifique et de son inlassable activité de semeur d'idées et de jeteur de ponts. Il ne connaissait

pas de frontières entre les domaines de la science, ce qui lui a permis d'en abattre beaucoup. Sa passion de vulgarisateur, au sens le plus noble du terme, a sensibilisé un grand public à la beauté des objets fractals.

Bien qu'il ait passé l'essentiel de sa carrière aux États-Unis, le français, qui n'était pourtant que sa première langue adoptive, a toujours été cher à son cœur : c'est en français qu'il publie ses premiers ouvrages sur les fractales, et le congrès « fondateur » de la géométrie fractale se tint à Courchevel en juillet 1982. Il était extrêmement fier d'avoir été nommé chevalier de la légion d'honneur en 2006. Ses apports à la langue scientifique française (bien sûr, mais internationale aussi), extrêmement imagés, sont exemplaires et adoptés aujourd'hui par tous : flocon de Van Koch, escalier du diable, poussière de Lévy, ... et surtout le mot même fractal !

Esprit rebelle, dérangeant, inclassable, B. Mandelbrot a reçu les plus hautes distinctions internationales, dont le prix Wolf en physique en 1993 et le prix du Japon. Ses ouvrages ont eu une immense influence sur la communauté scientifique ; citons « Les objets fractals, forme, hasard et dimension » ou « The fractal Geometry of Nature ». Il était en train d'achever la rédaction de ses mémoires quand la mort l'a emporté.

Un grand nombre de scientifiques, dans les disciplines les plus diverses, se réclament aujourd'hui de ses idées, et de son approche, aussi originale que féconde, des problèmes scientifiques.

Ce numéro spécial, par son organisation et ses contributions, tente de refléter la diversité des domaines dans lesquels les idées de B. Mandelbrot jouent un rôle aujourd'hui. Les textes qui suivent, écrits par des collaborateurs et des proches de B. Mandelbrot, sont des témoignages personnels, mais aussi une analyse de son apport, tant au sein des mathématiques que des autres sciences. Ces textes, œuvres de mathématiciens, physiciens, chimistes, biologistes, économistes, témoignent de l'universalité des apports de B. Mandelbrot à la science. Le dernier texte, écrit par B. Mandelbrot lui-même, et repris de l'ouvrage « L'irruption des géométries fractales dans les sciences » est une réflexion sur son itinéraire personnel et intellectuel, et permet d'appréhender en profondeur sa personnalité scientifique. Enfin, nous remercions Aliette Mandelbrot, son épouse, Murad Taqqu et Bernard Sapoval qui nous ont permis de reproduire plusieurs photographies. Nous remercions également Jean-François Colonna pour les nombreuses illustrations qu'il nous a fournies et qui ornent ce volume. Nous sommes également très reconnaissants au consortium Cap'Math, à l'École Polytechnique, à la Fondation Mathématique Jacques Hadamard (FMJH), à la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP), au Labex Bézout, et au Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (LAMA) de l'université Paris Est Créteil, pour le soutien qu'ils ont apporté à l'édition de cet ouvrage.

[1] P. Jones, Foreword to « *Fractals and Chaos : The Mandelbrot Set and Beyond* », 2004, Springer.

[2] B. Mandelbrot, « How Long Is the Coast of Britain ? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension », *Science, New Series*, **156**, n° 3775. (May 5, 1967), pp. 636-638.

[3] B. Mandelbrot, « *The Fractalist : memoirs of a scientific maverick* », Pantheon 2012.

---

## Repères biographiques

---

- 20 novembre 1924** : naissance à Varsovie (Pologne).
- 1936 : la famille Mandelbrot émigre à Paris.
- 1939 : déplacement vers Tulle.
- 1947 : ingénieur de l'École Polytechnique.
- 1948 : maîtrise en aéronautique, CalTech.
- 1949-57 : chercheur au CNRS.
- 1952 : thèse de mathématiques, Paris.
- 1953 : post-doc sous la direction de J. Von Neumann.
- 1955 : mariage avec Aliette Kagan.
- 1958 : déménagement aux États-Unis, rejoint IBM.
- 1963 : publication de « On the variation of certain speculative prices ».
- 1967 : publication de « How long is the coast of Britain? Statistical selfsimilarity and fractional dimension » (Science).
- 1974 : publication de « Intermittent turbulence in self-similar cascades : Divergence of high moments and dimension of the carrier ».
- 1975 : publication de « Les Objets Fractals : Forme, Hasard et Dimension ».
- 1977 : publication de « Fractals : Form, Chance, and Dimension ».
- 1979 : début de l'étude de l'ensemble de Mandelbrot, formulation de la conjecture de la connexité de l'ensemble de Mandelbrot.
- 1982 : publication de « The Fractal Geometry of Nature », membre de l'American Academy of Arts and Sciences, formulation de la conjecture des  $4/3$ , preuve de la connexité de l'ensemble de Mandelbrot par A. Douady et J. Hubbard.
- 1985 : formulation de la conjecture sur la dimension 2 de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot.
- 1988 : prix Humboldt.
- 1989 : chevalier de la légion d'honneur.
- 1993 : prix Wolf en physique.
- 1994 : prix Honda, Shishikura démontre la conjecture sur la dimension de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot.
- 1996 : médaille de Vermeil de la Ville de Paris.
- 1997 : publication de « Fractals and Scaling in Finance ».
- 1999 : Sterling Professeur de mathématiques à l'université de Yale, Publication de « Multifractals and  $1/f$  Noise ».
- 2000 : Lewis Fry Richardson Award, European Geophysical Society.

2001 : membre de l'U.S. National Academy of Sciences, preuve de la conjecture des  $4/3$  par G. Lawler, O. Schramm et W. Werner.

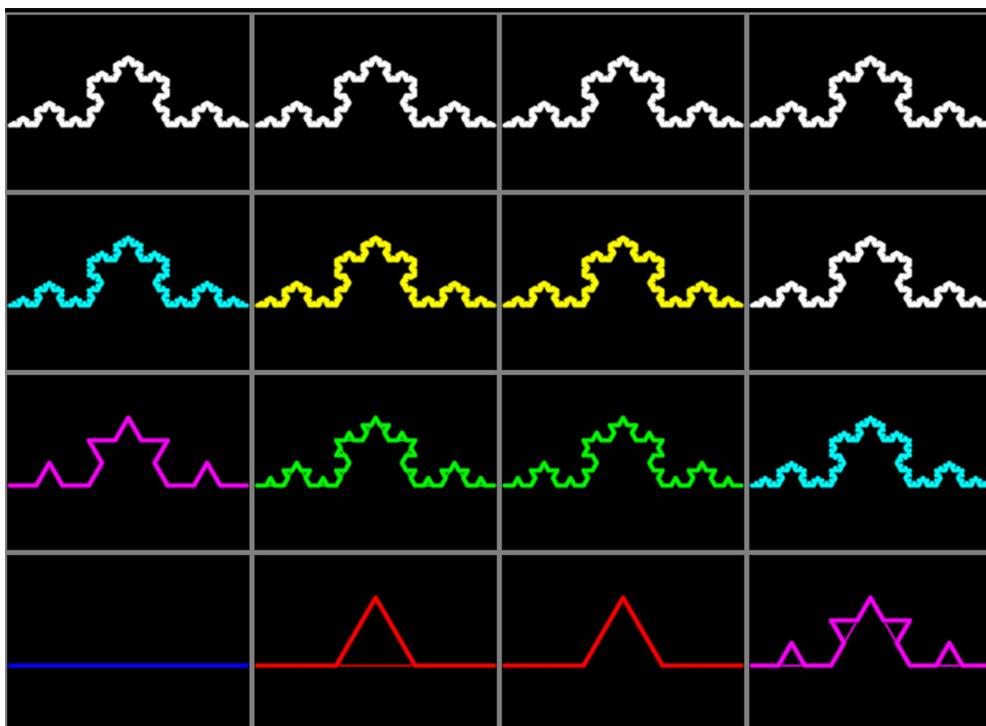
2003 : lauréat du « Japan Prize for Science and Technology ».

2005 : prix Sierpinski, Société Mathématique Polonaise.

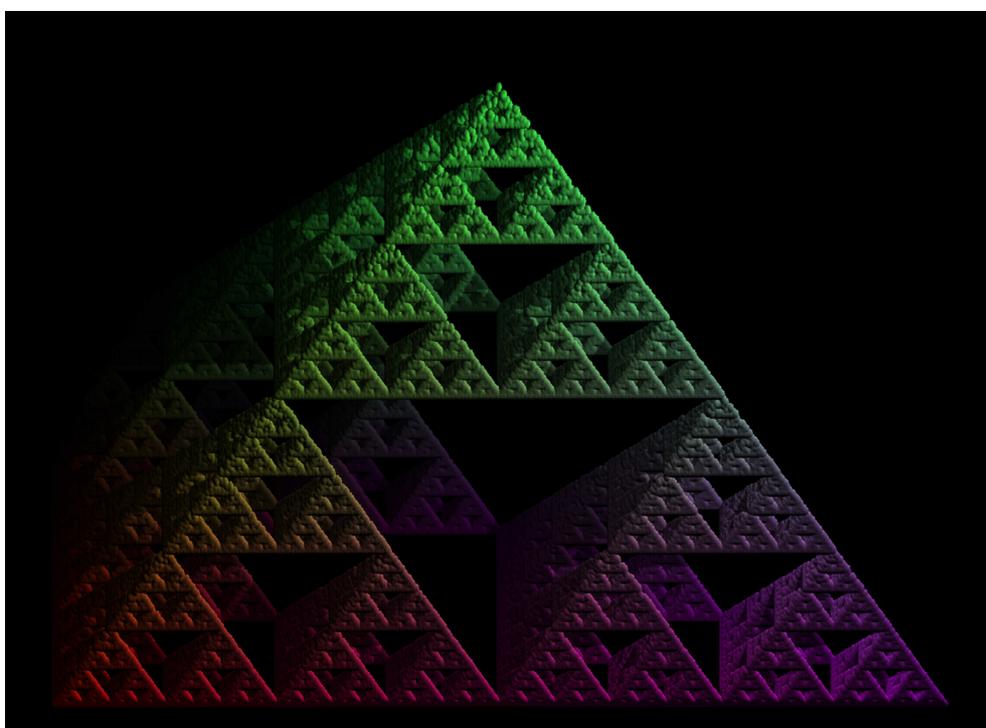
2006 : officier de la Légion d'honneur.

**14 octobre 2010** : décès à Cambridge, Massachusetts.

Benoît Mandelbrot était Docteur Honoris Causa de 13 universités.



Les sept premières étapes de la construction de la courbe de von Koch.



Généralisation tridimensionnelle du triangle de Sierpinski obtenue à l'aide de la méthode des « Iterated Function Systems » – IFS –.