# Concours SMF Junior 2018

## Rappel des consignes

*Vous trouverez ci-dessous les 10 problèmes de la session 2018 du concours SMF junior. Bonne recherche et amusez-vous bien !*

*Le concours se termine le dimanche 04 novembre à 23h59.*

*Les copies sont à rendre sous forme de fichiers pdf déposés sur le site* https://concourssmf2018.sciencesconf.org*. Il n'est pas obligatoire de résoudre tous les problèmes.*

*Il faut un fichier par problème. Le nom de fichier doit commencer par l'acronyme de votre équipe, suivi de* `_solution`*, suivi du numéro de problème (qui doit correspondre à la nomenclature). Par exemple,* `ACrO_solution8.pdf`*.*

*Avant le dépôt, préparez vos fichiers pdf, et ouvrez le Guide du dépôt de solutions. Suivez scrupuleusement les instructions : un dépôt par problème.*

*N'attendez pas la dernière minute pour déposer. Vous avez accès à vos dépôts et vous pouvez les modifier jusqu'à la fin du concours.*

*La remise des prix aura lieu à Paris, dans le quartier latin, à l'Institut Henri Poincaré, le samedi 08 décembre 2018. Tous les candidats sont invités !*

## Problème 1

Pour une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on note $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [0,1]\}$ son graphe. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ le flocon de Von Koch. Existe-t-il un nombre dénombrable de fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ et d'isométries du plan $T_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles que l'on ait l'inclusion suivante ?

$$C \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(\Gamma_{f_n}).$$

Une référence pour le flocon de Von Koch peut être :
http ://staff.math.su.se/lenb/dok/von-Koch-1904.pdf.

## Problème 2

Montrer que pour tout triplet $(p, q, r)$ de nombres premiers deux à deux distincts, il existe une solution $(x, y, z)$ en entiers strictement positifs à l'équation $x^p + y^q = z^r$.

## Problème 3

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : X \to X$ une application mesurable préservant la mesure $\mu$, c'est-à-dire que $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Le quadruplet $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est dit système dynamique mesuré.

Un élément $A$ de $\mathcal{B}$ est dit invariant s'il vérifie $T^{-1}(A) = A$. La sous-tribu de $\mathcal{B}$ constituée des ensembles invariants sera notée $\mathcal{J}$.

Le théorème ergodique de Birkhoff énonce que pour toute fonction $f \in L^1(\mu)$, pour $\mu$-presque tout $x$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{J}).$$

De plus, si $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, la limite ci-dessus existe aussi au sens $L^p$.

Une suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 1}$ définies sur $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est une martingale si

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(M_{n+1}|M_1, \cdots, M_n) = M_n.$$

Le théorème de Doob énonce que si la martingale $(M_n)_{n\geq 1}$ est telle que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|M_n| < \infty$, alors $M_n$ converge presque sûrement. De plus, si $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$ avec $1 < p < \infty$, alors $M_n$ converge aussi au sens $L^p$.

Dans la suite, on se donne $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante d'éléments de $[0,1]$ telle que $\sum p_n = \infty$, et indépendamment de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n$, i.e. $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(\xi_n = 0)$.

On considère l'ensemble aléatoire

$$\chi = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n = 1\}.$$

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{(p_1 + \cdots + p_n)^c}$ pour $c > 0$.
2. Montrer que pour toute $f \in L^2(\mu)$, on a presque sûrement, pour $\mu$-presque tout $x$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\chi \cap [1,N]|} \sum_{n\in\chi\cap[1,N]} f(T^n x) = \mathbb{E}(f|\mathcal{J}),$$

   et que la limite existe aussi au sens de $L^2(\mu)$.

# Problème 4

Pedro et Dilma jouent au jeu suivant dans la boule unité fermée (euclidienne) $B$ de $\mathbb{R}^2$. Pedro commence en choisissant un point $P_1$ de $B$, auquel Dilma répond en choisissant une droite $D_1$ passant par $P_1$. Pedro joue ensuite un point $P_2$ de $B$ situé sur $D_1$, auquel Dilma répond par une droite $D_2$ passant par $P_2$. Les deux joueurs jouent ainsi une infinité de tours, de manière à produire deux suites $(P_n)_{n\geq 1}$ et $(D_n)_{n\geq 1}$ de points de $B$ et de droites. Dilma est déclarée gagnante si la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge. Dans le cas contraire, Pedro est déclaré gagnant.
L'un des deux joueurs possède-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, lequel ?

# Problème 5

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est une suite aléatoire $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_0 = 0$ et

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

avec $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes et de même loi, définies sur $\Omega$. On dira que la marche est **symétrique** si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(X_1 = -n).$$

On peut montrer et on admet ici qu'une marche aléatoire ne peut avoir que deux comportements possibles :

— ou bien, presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0, et on dit que la marche est **récurrente**.

— ou bien, presque sûrement, la marche aléatoire ne passe qu'un nombre fini de fois par chacun des sites de $\mathbb{Z}$ et on dit que la marche est **transitoire**.

On se demande dans ce problème si la marche obtenue en sommant deux marches aléatoires indépendantes transitoires peut être récurrente, et si la marche obtenue en sommant deux marches aléatoires indépendantes récurrentes peut être transitoire.

Pour déterminer, suivant la loi de $X_1$, le comportement de la marche aléatoire, on dispose d'un critère analytique dû à Chung et Fuchs, que nous admettons :

$$\text{la marche aléatoire } S \text{ est transitoire } \iff \Re\left(\int_0^1 \frac{dy}{1-\mathbb{E}[e^{iyX_1}]}\right) < +\infty.$$

Dans le cas d'une marche aléatoire symétrique, ce critère se reformule de la façon suivante :

$$\text{la marche aléatoire } S \text{ est transitoire } \iff \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_1 = n)(1-\cos(yn))\right)^{-1} dy < +\infty.$$

1. On suppose que $X_1$ est intégrable.
   Montrer que la marche aléatoire $S$ est récurrente si et seulement si $\mathbb{E}[X_1] = 0$.
2. Dans cette question, on suppose la marche aléatoire symétrique et qu'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que, quand $n \to +\infty$,
   $$\mathbb{P}[X_1 = n] = \mathbb{P}[X_1 = -n] \sim \frac{c}{n^{1+\alpha}}.$$
   Pour quelle(s) valeurs(s) de $\alpha$ la marche aléatoire $S$ est-elle récurrente ?
3. Peut-on construire deux marches aléatoires $S$ et $S'$ sur $\mathbb{Z}$, transitoires, indépendantes mais de lois différentes, telles que $S + S'$ soit récurrente ?
   Est-ce possible si $S$ et $S'$ sont des marches aléatoires symétriques ?
4. Peut-on construire deux marches aléatoires $S$ et $S'$ sur $\mathbb{Z}$, symétriques, récurrentes, indépendantes mais de lois différentes, telles que $S + S'$ soit transitoire ?

# Problème 6

On considère une goutte d'encre sphérique (ou circulaire en dimension 2) immergée dans un fluide. Le fluide est en mouvement, avec un champ de vitesse connu, constant dans le temps, et régulier par rapport à la variable d'espace. On suppose aussi que le fluide est contenu dans une structure bornée et que la vitesse du fluide le long de cette structure est nulle.

La goutte d'encre est transportée et déformée par le champ de vitesse (les effets de diffusion et gravité sont supposés négligeables). Le problème est de décrire des caractéristiques qualitatives et quantitatives de la goutte au fur et à mesure de son évolution. Spécifiquement, on considère les exercises/questions suivantes :

1. Montrer que la goutte ne touche jamais la structure.
2. La connexité de la goutte est-elle préservée au cours de son évolution ? Et sa simple connexité ?
3. Comment le volume de la goutte varie-t-il au cours du temps ?
4. Trouver un exemple de champ de vitesse réaliste (en un sens à justifier) pour lequel la goutte perd, à partir d'un certain temps, son caractère convexe.
5. Montrer que, en dimension 2 et pour des temps petits, la goutte reste convexe. Caractériser, en fonction du champ de vitesse ou de quantités déduites du champ de vitesse, le temps maximal pendant lequel la goutte reste convexe.

6. Le champ de vitesses préserve en tout temps certaines propriétés de la goutte, comme sa compacité, la régularité de son bord, etc. Trouver un (ou plusieurs) champ de vitesses qui, *asymptotiquement* en temps long, font tendre la goutte vers une forme géométrique pour laquelle une ou plusieurs de ces propriétés ne sont plus respectées. On ne demande pas ici de trouver un champ de vitesses 'réaliste'.

## Problème 7

Existe-t-il une mesure de probabilité sur le plan euclidien qui favorise les triangles acutangles (i.e. dont les trois angles sont strictement aigus) ? Autrement dit, existe-t-il une mesure de probabilité sur le plan telle que trois points choisis au hasard et de manière indépendante forment un triangle acutangle non dégénéré avec une probabilité qui dépasse $\frac{1}{2}$ ?

## Problème 8

Un polynôme $P$ de degré $n \geq 1$ est dit antisymétrique si $P(-x) = x^n P(\frac{1}{x})$ pour tout nombre réel non nul $x$. Montrer qu'un polynôme antisymétrique avec des coefficients entiers impairs n'a pas de racine sur le cercle unité de $\mathbb{C}$.

## Problème 9

Soit $A$ un ensemble fini. Un mot fini sur $A$ est une suite finie $u = (u_n)_{1 \leq n \leq l}$ d'éléments de $A$ ; on le note plus communément par concaténation $u = u_1 \dots u_l$. L'entier $l$ est la longueur de $u$ ; on la note $|u|$. Un mot infini sur $A$ est une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$ avec $a_n \in A$. Un mot fini $u$ est un facteur d'un mot (fini ou infini) $v$ s'il existe un entier $j$ tel que $u = v_j \dots v_{j+|u|-1}$.

Un mot infini $\mathbf{a}$ est à lacunes bornées si pour tout facteur $u$ de $\mathbf{a}$, il existe un entier $l$ tel que pour tout facteur $v$ de longueur $l$ de $\mathbf{a}$, $u$ est un facteur de $v$.

Un mot infini $\mathbf{a}$ est un $T$-mot s'il satisfait à la propriété suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}, a_{n+kp} = a_n.$$

Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ deux mots infinis sur des alphabets $A$ et $B$ respectivement. Le produit de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est le mot infini $\mathbf{c}$ sur l'alphabet $A \times B$ tel que $c_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que tout $T$-mot est à lacunes bornées.
2. Soit $\mathbf{d}$ le mot infini défini par

$$d_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s_2(n) \neq s_2(n+1) \mod 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   où $s_2(n)$ est la somme des chiffres de la représentation de $n$ en base 2. Montrer que $\mathbf{d}$ est un $T$-mot.
3. Montrer que si $\mathbf{a} \in A^{\mathbb{N}}$ est un $T$-mot et si $\mathbf{b} \in B^{\mathbb{N}}$ est à lacunes bornées, alors $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est à lacunes bornées.

## Problème 10

Peut-on trouver une configuration finie de points blancs et noirs dans $\mathbb{R}^2$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées ?

1. Pour tout point blanc, il y a exactement 10 points noirs qui se trouvent à distance 1 de ce point.
2. Le nombre de points blancs est strictement supérieur au nombre de points noirs.