

384

ASTÉRISQUE

2016

QUANTIZATIONS  
OF CONICAL SYMPLECTIC RESOLUTIONS

Tom BRADEN, Anthony LICATA,  
Nicholas PROUDFOOT & Ben WEBSTER

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 384, 2016

---

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES      Damien GABORIAU  
Viviane BALADI      Michael HARRIS  
Gérard BESSON      Fabrice PLANCHON  
Laurent BERGER      Pierre SCHAPIRA  
Philippe BIANE      Bertrand TOEN  
Hélène ESNAULT  
Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 45 € (\$67)

*Abonnement* Europe : 472 €, hors Europe : 512 € (\$768)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-845-9

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

---

**384**

**ASTÉRISQUE**

**2016**

QUANTIZATIONS  
OF CONICAL SYMPLECTIC RESOLUTIONS

Tom BRADEN, Anthony LICATA,  
Nicholas PROUDFOOT & Ben WEBSTER

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Tom Braden*

Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Amherst,  
MA 01003, USA

*Anthony Licata*

Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra, ACT  
0200, Australia

*Nicholas Proudfoot*

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA

*Ben Webster*

Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA 22904, USA

# QUANTIZATIONS OF CONICAL SYMPLECTIC RESOLUTIONS

Tom BRADEN, Anthony LICATA, Nicholas PROUDFOOT & Ben WEBSTER

**Abstract.** — We re-examine some topics in representation theory of Lie algebras and Springer theory in a more general context, viewing the universal enveloping algebra as an example of the section ring of a quantization of a conical symplectic resolution. While some modification from this classical context is necessary, many familiar features survive. We study how this approach applies to other quantized symplectic resolutions, including quiver varieties and hypertoric varieties. This provides a new context for known results about Lie algebras, Cherednik algebras, finite  $W$ -algebras, and hypertoric enveloping algebras, while also pointing to the study of new algebras arising from more general resolutions.

In part I, we consider a version of the Beilinson-Bernstein localization theorem, the theory of Harish-Chandra bimodules and their relationship to convolution operators on cohomology, and a discrete group action on the derived category of representations, generalizing the braid group action on category  $\mathcal{O}$  via twisting functors.

In part II, we define and study category  $\mathcal{O}$  for a symplectic resolution, generalizing the classical BGG category  $\mathcal{O}$ , which is associated with the Springer resolution. This includes the development of intrinsic properties paralleling the BGG case, such as a highest weight structure and analogues of twisting and shuffling functors, along with an extensive discussion of individual examples.

We observe that category  $\mathcal{O}$  is often Koszul, and its Koszul dual is often equivalent to category  $\mathcal{O}$  for a different symplectic resolution. This leads us to define the notion of a symplectic duality between symplectic resolutions, which is a collection of isomorphisms between representation theoretic and geometric structures, including a Koszul duality between the two categories. This duality has various cohomological consequences, including (conjecturally) an identification of two geometric realizations, due to Nakajima and Ginzburg/-Vilonen, of weight spaces of simple representations of simply-laced simple algebraic groups.

An appendix by Ivan Losev establishes a key step in the proof that  $\mathcal{O}$  is highest weight.

**Résumé (Quantifications des résolutions symplectiques coniques.)** — Nous réexaminons certains sujets dans la théorie de la représentation de algèbres de Lie et théorie de

Springer dans un contexte plus général, voyant l'algèbre enveloppante comme un exemple d'un anneau des sections d'une quantification d'une résolution symplectique conique. Alors que modification de ce contexte classique est nécessaire, beaucoup caractéristiques familiers survivons. Nous étudions comment cette approche applique à d'autres résolutions symplectiques quantifiées, y compris les variétés carquois et variétés hypertoriques. Cela fournit un nouveau contexte pour les résultats connus sur algèbres de Lie, algèbres de Cherednik, algèbres  $W$  finies, et algèbres enveloppantes hypertoriques, tout en pointant à l'étude de nouvelles algèbres découlant des résolutions plus générales.

Dans la partie I, nous considérons une version de la théorème de localisation de Beilinson-Bernstein, la théorie de bimodules de Harish-Chandra et leur relation aux opérateurs de convolution sur cohomologie, et une action d'une groupe discrète sur la catégorie dérivée de représentations, en généralisant l'action de la groupe de tresses sur la catégorie  $\mathcal{O}$  par foncteurs de twist.

Dans la partie II, nous définissons et étudions la catégorie  $\mathcal{O}$  pour une résolution symplectique, généralisant la catégorie  $\mathcal{O}$  classique de BGG, qui est associée à la résolution de Springer. Cela inclut le développement de propriétés intrinsèques en parallèle du cas de BGG, tels que la structure de plus haut poids et des analogues des foncteurs de twist et de battage, avec une discussion approfondie des exemples individuels.

Nous observons que la catégorie  $\mathcal{O}$  est souvent Koszul, et son Koszul dual est souvent équivalent à la catégorie  $\mathcal{O}$  pour une autre résolution symplectique. Cela nous amène à définir la notion de dualité symplectique entre les résolutions symplectiques, qui est une collection d'isomorphismes entre des structures de la théorie des représentations et géométrique, y compris une dualité de Koszul entre les deux catégories. Cette dualité a diverses conséquences cohomologiques, y compris (conjecturalement) une identification de deux réalisations géométriques, défini par Nakajima et Ginzburg / Mirkovic-Vilonen, des espaces de poids de simples représentations des groupes algébriques simples simplement lacées.

Une annexe par Ivan Losev établit une étape clé dans la preuve que  $\mathcal{O}$  est de plus haut poids.

## TABLE DES MATIÈRES

TOM BRADEN, NICHOLAS PROUDFOOT & BEN WEBSTER — <i>Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure</i>	1
1. Introduction	2
2. Conical symplectic resolutions	6
2.1. Deformations	8
2.2. The Weyl group	9
2.3. Birational geometry	10
3. Quantizations	12
3.1. The period map	12
3.2. $\mathbb{S}$ -structures	14
3.3. The section ring	15
3.4. Quantum Hamiltonian reduction	19
4. Modules over quantizations	23
4.1. Cotangent bundles	24
4.2. Localization	28
4.3. Derived localization	29
5. $\mathbb{Z}$ -algebras	33
5.1. Quantizations of line bundles	33
5.2. The quantum homogeneous coordinate ring of $\mathfrak{X}$	37
5.3. $\mathbb{Z}$ -algebras and abelian localization	39
5.4. Comparison of the analytic and algebraic categories	44
5.5. Twisted modules and the Kirwan functor	45
6. Convolution and twisting	50
6.1. Harish-Chandra bimodules	51
6.2. Characteristic cycles	56
6.3. Twisting bimodules	59
6.4. Twisting functors	63
References	70

TOM BRADEN & ANTHONY LICATA & NICHOLAS PROUDFOOT & BEN WEBSTER —  
*Quantizations of conical symplectic resolutions II: category and symplectic duality* 75

1. Introduction .....	76
2. Quantizations of conical symplectic resolutions .....	82
2.1. Conical symplectic resolutions .....	82
2.2. Deformation theory and birational geometry .....	83
2.3. Quantizations .....	84
2.4. Integrality .....	85
2.5. Sheaves of modules .....	86
2.6. Localization .....	87
2.7. Modules with supports .....	88
2.8. Harish-Chandra bimodules and characteristic cycles .....	90
3. The categories $\mathcal{O}_a$ and $\mathcal{O}_g$ .....	91
3.1. The relative core .....	91
3.2. The category $\mathcal{O}_a$ .....	93
3.3. The category $\mathcal{O}_g$ .....	95
4. Categorical preliminaries .....	97
4.1. Koszul categories .....	97
4.2. Highest weight and standard Koszul categories .....	101
5. The structure of $\mathcal{O}_a$ and $\mathcal{O}_g$ .....	102
5.1. The B algebra .....	102
5.2. The category $\mathcal{O}_a$ is highest weight (for most quantizations) .....	104
5.3. The category $\mathcal{O}_g$ is highest weight .....	107
5.4. The center of the Yoneda algebra of $\mathcal{O}_g$ .....	109
6. The Grothendieck group of $\mathcal{O}_g$ .....	110
6.1. Characteristic cycles revisited .....	110
6.2. Intersection forms for category $\mathcal{O}$ .....	111
6.3. Supports of simples .....	114
7. Categorical filtrations .....	117
7.1. Filtration on Harish-Chandra bimodules .....	117
7.2. Filtration on category $\mathcal{O}$ .....	119
7.3. Relation with the BBD filtration .....	121
7.4. The extreme pieces .....	124
7.5. Cells .....	125
8. Twisting and shuffling functors .....	127
8.1. Twisting functors .....	127
8.2. Shuffling functors .....	129
8.3. Twisting and shuffling commute .....	136
9. Examples .....	137
9.1. Cotangent bundles of partial flag varieties .....	138
9.2. S3-varieties .....	140
9.3. Hypertoric varieties .....	144



9.4. Hilbert schemes on ALE spaces .....	146
9.5. Quiver varieties .....	148
9.6. Affine Grassmannian slices .....	150
10. Symplectic duality .....	151
10.1. The definition .....	152
10.2. Examples of symplectic dualities .....	153
10.2.1. Cotangent bundles of flag varieties .....	153
10.2.2. S3-varieties .....	153
10.2.3. Hypertoric varieties .....	155
10.2.4. Affine type A quiver varieties .....	155
10.3. Duality of cones .....	157
10.4. Duality of leaf closures and slices .....	159
10.5. Duality of leaf filtrations .....	160
10.6. Duality of localization algebras .....	164
10.7. Knot homologies and symplectic duality .....	165
An Ext-vanishing result (appendix by Ivan Losev) .....	167
A.1. The proof .....	168
References .....	173

