384

ASTÉRISQUE

2016

QUANTIZATIONS OF CONICAL SYMPLECTIC RESOLUTIONS

Tom BRADEN, Anthony LICATA,
Nicholas PROUDFOOT & Ben WEBSTER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 384, 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 45 € ($ 67)

Abonnement Europe : 472 €, hors Europe : 512 € ($ 768)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-845-9

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

384 ASTÉRISQUE

2016

QUANTIZATIONS OF CONICAL SYMPLECTIC RESOLUTIONS

Tom BRADEN, Anthony LICATA,
Nicholas PROUDFOOT & Ben WEBSTER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Tom Braden
Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Amherst, MA 01003, USA

Anthony Licata
Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia

Nicholas Proudfoot
Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA

Ben Webster
Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA 22904, USA

***Classification mathématique par sujet* (2000). —** 53D55, 16G99, 14M99, 17B10.

QUANTIZATIONS OF CONICAL SYMPLECTIC RESOLUTIONS

Tom BRADEN, Anthony LICATA, Nicholas PROUDFOOT & Ben WEBSTER

Abstract. — We re-examine some topics in representation theory of Lie algebras and Springer theory in a more general context, viewing the universal enveloping algebra as an example of the section ring of a quantization of a conical symplectic resolution. While some modification from this classical context is necessary, many familiar features survive. We study how this approach applies to other quantized symplectic resolutions, including quiver varieties and hypertoric varieties. This provides a new context for known results about Lie algebras, Cherednik algebras, finite W-algebras, and hypertoric enveloping algebras, while also pointing to the study of new algebras arising from more general resolutions.

In part I, we consider a version of the Beilinson-Bernstein localization theorem, the theory of Harish-Chandra bimodules and their relationship to convolution operators on cohomology, and a discrete group action on the derived category of representations, generalizing the braid group action on category $\mathcal{O}$ via twisting functors.

In part II, we define and study category $\mathcal{O}$ for a symplectic resolution, generalizing the classical BGG category $\mathcal{O}$, which is associated with the Springer resolution. This includes the development of intrinsic properties paralleling the BGG case, such as a highest weight structure and analogues of twisting and shuffling functors, along with an extensive discussion of individual examples.

We observe that category $\mathcal{O}$ is often Koszul, and its Koszul dual is often equivalent to category $\mathcal{O}$ for a different symplectic resolution. This leads us to define the notion of a symplectic duality between symplectic resolutions, which is a collection of isomorphisms between representation theoretic and geometric structures, including a Koszul duality between the two categories. This duality has various cohomological consequences, including (conjecturally) an identification of two geometric realizations, due to Nakajima and Ginzburg/-Vilonen, of weight spaces of simple representations of simply-laced simple algebraic groups.

An appendix by Ivan Losev establishes a key step in the proof that $\mathcal{O}$ is highest weight.

***Résumé* (Quantifications des résolutions symplectiques coniques.)** — Nous réexaminons certains sujets dans la théorie de la représentation de algèbres de Lie et théorie de

Springer dans un contexte plus général, voyant l'algèbre enveloppante comme un exemple d'un anneau des sections d'un quantification d'une résolution symplectique conique. Alors que modification de ce contexte classique est nécessaire, beaucoup caractéristiques familiers survivons. Nous étudions comment cette approche applique à d'autres résolutions symplectiques quantifiées, y compris les variétés carquois et variétés hypertorique. Cela fournit un nouveau contexte pour les résultats connus sur algèbres de Lie, algèbres de Cherednik, algèbres W finies, et algèbres enveloppantes hypertoriques, tout en pointant à l'étude de nouvelles algèbres découlant des résolutions plus générales.

Dans la partie I, nous considérons une version de la théorème de localisation de Beilinson-Bernstein, la théorie de bimodules de Harish-Chandra et leur relation aux opérateurs de convolution sur cohomologie, et une action d'une groupe discrète sur la catégorie dérivée de représentations, en généralisant l'action de la groupe de tresses sur la catégorie $\mathcal{O}$ par foncteurs de twist.

Dans la partie II, nous définissons et etudions la catégorie $\mathcal{O}$ pour une résolution symplectique, généralisant la catégorie $\mathcal{O}$ classique de BGG, qui est associée à la résolution de Springer. Cela inclut le développement de propriétés intrinsèques en parallèle du cas de BGG, tels que la structure de plus haut poids et des analogues des foncteurs de twist et de battage, avec une discussion approfondie des exemples individuels.

Nous observons que la catégorie $\mathcal{O}$ est souvent Koszul, et son Koszul dual est souvent équivalent à la catégorie $\mathcal{O}$ pour une autre résolution symplectique. Cela nous amène à définir la notion de dualité symplectique entre les résolutions symplectiques, qui est une collection d'isomorphismes entre des structures de la théorie des représentations et géométrique, y compris une dualité de Koszul entre les deux catégories. Cette dualité a diverses conséquences cohomologiques, y compris (conjecturalement) une identification de deux réalisations géométriques, defini par Nakajima et Ginzburg / Mirkovic-Vilonen, des espaces de poids de simples représentations des groupes algébriques simples simplement lacées.

Une annexe par Ivan Losev établit une étape clé dans la preuve que $\mathcal{O}$ est de plus haut poids.

TABLE DES MATIÈRES