

386

ASTÉRISQUE

2017

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES
TORDUS SUR UN GROUPE
RÉDUCTIF CONNEXE p -ADIQUE

Bertrand Lemaire

Guy Henniart

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Laurent BERGER
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT

Philippe EYSSIDIEUX
Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille CEDEX 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 55 € (\$ 82)

Abonnement électronique : 500 € (\$ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris CEDEX 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

astsmf@ihp.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

Tous droits réservés (article L122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L335-2 et suivants du CPI.

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85629-851-0

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ASTÉRISQUE 386

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES
TORDUS SUR UN GROUPE
RÉDUCTIF CONNEXE p -ADIQUE

Bertrand Lemaire
Guy Henniart

B. Lemaire

Aix-Marseille Université, Département de Mathématiques, 163 Avenue de Luminy,
Case 901, 13288 - Marseille, France.

E-mail : `bertrand.lemaire@univ-amu.fr`

G. Henniart

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS,
91405 Orsay Cedex, France.

E-mail : `Guy.Henniart@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Corps local non archimédien, caractère-distribution, espace tordu, caractère (tordu), élément quasi-semi-simple, élément quasi-régulier, fonction caractère, formule d'intégration de Weyl, groupe réductif, intégrale orbitale, représentation admissible, théorème de densité spectrale, transformée de Fourier, théorème de Paley-Wiener.

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF CONNEXE p -ADIQUE

Bertrand Lemaire, Guy Henniart

Résumé. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique quelconque. Soient G un groupe réductif connexe défini sur F , et G^{\natural} un G -espace tordu lui aussi défini sur F . On suppose que l'ensemble $G^{\natural}(F)$ n'est pas vide, et on le munit de la topologie définie par F . On fixe un caractère ω (i.e. un homomorphisme continu dans \mathbb{C}^{\times}) de $G(F)$. Dans ce mémoire, on développe la théorie des ω -représentations (complexes, lisses) de $G^{\natural}(F)$ à partir de celle des représentations de $G(F)$. Une ω -représentation de $G^{\natural}(F)$ est par définition la donnée d'une représentation (π, V) de $G(F)$ et d'une application Π de $G^{\natural}(F)$ dans le groupe des \mathbb{C} -automorphismes de V telle que $\Pi(x \cdot \delta \cdot y) = \pi(x) \circ \Pi(\delta) \circ (\omega\pi)(y)$ pour tout $\delta \in G^{\natural}(F)$ et tous $x, y \in G(F)$. Si la représentation sous-jacente π de $G(F)$ est admissible, on peut définir le caractère Θ_{Π} de Π , qui est une distribution sur $G^{\natural}(F)$. Les principaux résultats prouvés dans ce mémoire sont :

- si π est de longueur finie, alors la distribution Θ_{Π} est donnée par une fonction localement constante sur l'ouvert des éléments (quasi)-réguliers de $G^{\natural}(F)$;
- le théorème de Paley-Wiener scalaire, qui décrit l'image de la transformée de Fourier – l'application qui à une fonction localement constante et à support compact ϕ sur $G^{\natural}(F)$ associe la forme linéaire $\Pi \mapsto \Theta_{\Pi}(\phi)$ sur un groupe de Grothendieck adéquat ;
- le théorème de densité spectrale, qui décrit le noyau de la transformée de Fourier.

Abstract (Representations of twisted spaces on a connected reductive p-adic group)

Let F be a locally compact non-Archimedean field, of any characteristic. Let G be a connected reductive group defined over F , and G^{\natural} be a twisted G -space also defined over F . The set $G^{\natural}(F)$ is assumed to be non-empty, and it is endowed with the topology defined by F . We fix a character ω (i.e. a continuous homomorphism in \mathbb{C}^{\times}) of $G(F)$. In this memoir, we study the theory of (complex, smooth) ω -representations of $G^{\natural}(F)$, from that of representations of $G(F)$. An ω -representation of $G^{\natural}(F)$ is given by a representation (π, V) of $G(F)$ and a map Π from $G^{\natural}(F)$ into the group of \mathbb{C} -automorphisms of V , such that $\Pi(x \cdot \delta \cdot y) = \pi(x) \circ \Pi(\delta) \circ (\omega\pi)(y)$ for all $\delta \in G^{\natural}(F)$ and all $x, y \in G(F)$. If the underlying representation π of $G(F)$ is admissible, we can define the character Θ_{Π} of Π , which is a distribution on $G^{\natural}(F)$. The main results proved in this memoir are:

- if π is of finite length, then the distribution Θ_{Π} is given by a locally constant function on the open set of (quasi-)regular elements in $G^{\natural}(F)$;
- the scalar Paley-Wiener theorem, which describes the image of the Fourier transform – the map which associate to a compactly supported locally constant function ϕ on $G^{\natural}(F)$ the linear form $\Pi \mapsto \Theta_{\Pi}(\phi)$ on a suitable Grothendieck group;
- the spectral density theorem, which describes the kernel of the Fourier transform.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| Partie I. CARACTÈRES TORDUS DES REPRÉSENTATIONS ADMISSIBLES (B. Lemaire) | 1 |
| 1. Introduction | 3 |
| 2. Caractères tordus d'un groupe localement profini | 13 |
| 2.1. Module d'un automorphisme de G | 13 |
| 2.2. Caractères des représentations admissibles de G (rappels) | 15 |
| 2.3. Caractères tordus de G | 16 |
| 2.4. Espaces topologiques tordus | 17 |
| 2.5. Module d'un G -espace tordu | 19 |
| 2.6. Caractères des ω -représentations admissibles d'un G -espace tordu | 21 |
| 2.7. Induction compacte | 23 |
| 2.8. Caractères des induites compactes | 25 |
| 2.9. Commentaires | 32 |
| 3. Automorphismes d'un groupe réductif connexe | 33 |
| 3.1. Groupes algébriques affines ; généralités | 33 |
| 3.2. Automorphismes | 36 |
| 3.3. Groupes diagonalisables et tores | 37 |
| 3.4. Automorphismes semisimples et unipotents | 39 |
| 3.5. Groupes réductifs connexes | 41 |
| 3.6. Revêtement universel | 44 |
| 3.7. Automorphismes quasi-semisimples | 45 |
| 3.8. Automorphismes quasi-centraux | 50 |
| 3.9. Automorphismes quasi-semisimples localement finis | 52 |
| 3.10. Automorphismes réguliers ; les automorphismes intérieurs | 53 |
| 3.11. Automorphismes réguliers ; le cas général | 55 |
| 3.12. Éléments réguliers d'un \mathbf{H} -espace tordu | 59 |
| 3.13. Tores maximaux et sous-espaces de Cartan d'un \mathbf{H} -espace tordu | 61 |

| | |
|---|-----|
| 3.14. Orbites dans un \mathbf{H} -espace tordu | 62 |
| 4. Questions de rationalité | 67 |
| 4.1. Généralités (rappels) | 67 |
| 4.2. Généralités; suite | 68 |
| 4.3. Points rationnels d'un \mathbf{H} -espace tordu défini sur F | 70 |
| 4.4. La décomposition $\text{Aut}_{F'}(\mathbf{H}) = \text{Int}_{F'}(\mathbf{H}) \rtimes \mathfrak{A}_o$ | 70 |
| 4.5. Automorphismes stabilisant un sous-groupe de Borel défini sur F^{sep} | 72 |
| 4.6. Automorphismes stabilisant une paire de Borel définie sur F^{sep} | 74 |
| 4.7. Tores maximaux et sous-espaces de Cartan de $\mathbf{H}^{\natural}(F)$ | 79 |
| 4.8. $\mathbf{H}(F)$ -orbites dans $\mathbf{H}^{\natural}(F)$ | 80 |
| 4.9. La topologie ϖ -adique (cas d'un corps local non archimédien) | 81 |
| 5. Caractères tordus d'un groupe réductif p-adique | 87 |
| 5.1. Paires paraboliques de G | 87 |
| 5.2. Mesures normalisées | 88 |
| 5.3. Sous-espaces paraboliques de G^{\natural} | 90 |
| 5.4. Éléments réguliers et quasi-réguliers de G^{\natural} | 92 |
| 5.5. L'application $\mathcal{N}_{\theta, g_0} : G \rightarrow G$ pour θ localement fini | 95 |
| 5.6. La paire parabolique $(P_{[\gamma]}, A_{[\gamma]})$ de G associée à $\gamma \in G^{\natural}$ | 96 |
| 5.7. Le principe de submersion d'Harish-Chandra | 101 |
| 5.8. Les opérateurs T_{γ} pour $\gamma \in G^{\natural}$ quasi-régulier | 103 |
| 5.9. Induction parabolique et caractères | 106 |
| 5.10. Restriction de Jacquet et caractères | 108 |
| 5.11. Commentaire | 113 |
| 6. Séries discrètes et représentations cuspidales | 115 |
| 6.1. Caractères des représentations irréductibles essentiellement de caractère intégrable | 115 |
| 6.2. Caractères des représentations irréductibles cuspidales | 118 |
| 7. Intégrales orbitales et caractères | 121 |
| 7.1. Intégrales orbitales tordues | 121 |
| 7.2. Descente parabolique | 122 |
| 7.3. Formule d'intégration de Weyl | 124 |
| A. Représentations irréductibles d'un G-espace tordu | 133 |
| A.1. Rappels sur les représentations (lisses) irréductibles de G | 133 |
| A.2. ω -représentations G -irréductibles de G^{\natural} | 134 |
| A.3. $(\mathcal{H}^{\natural}, \omega)$ -modules et $(\mathcal{H}_K^{\natural}, \omega)$ -modules | 136 |
| A.4. ω -représentations irréductibles de G^{\natural} et $(\mathcal{H}_K^{\natural}, \omega)$ -modules simples | 138 |
| A.5. Indépendance linéaire des caractères tordus | 143 |
| A.6. La condition (P_2) pour $G^{\natural} = \mathbf{G}^{\natural}(F)$ | 144 |
| B. Représentations l-modulaires | 147 |
| B.1. Généralités [58, ch. 1] | 147 |

| | |
|--|----------------|
| B.2. R -représentations lisses | 148 |
| B.3. Le principe de submersion d'Harish-Chandra | 149 |
| B.4. Induction parabolique et restriction de Jacquet | 149 |
| B.5. Commentaires | 151 |
| C. Action d'un groupe algébrique et points rationnels | 153 |
| C.1. Rappels topologiques | 153 |
| C.2. Actions régulières, localement régulières et constructibles | 154 |
| C.3. Rappels sur la topologie définie par F | 155 |
| C.4. Le théorème de constructibilité | 157 |
| C.5. Quelques cas particuliers utiles | 158 |
| C.6. Un critère local de séparabilité (rappels) | 159 |
| C.7. Produit fibré (rappels) | 161 |
| C.8. Restriction à la Weil et morphisme de Frobenius (rappels) | 161 |
| C.9. Le lemme clé | 163 |
| C.10. Un résultat bien connu | 165 |
| C.11. Une conséquence du lemme clé | 166 |
| Partie II. LA TRANSFORMÉE DE FOURIER POUR LES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF p-ADIQUE (B. Lemaire et G. Henniart) | 171 |
| 1. Introduction | 173 |
| 1.1. La transformée de Fourier dans le cas non tordu (rappels) | 173 |
| 1.2. La transformée de Fourier tordue | 174 |
| 1.3. Formulation en termes de l'espace tordu de Labesse | 175 |
| 1.4. État des lieux | 176 |
| 1.5. Lien avec les travaux de Waldspurger | 176 |
| 1.6. Réduction à la partie « discrète » de la théorie | 177 |
| 1.7. Le théorème de Paley-Wiener | 178 |
| 1.8. Le cocentre tordu $\mathcal{C}(G^\natural, \omega)$ | 179 |
| 1.9. L'application d'Euler-Poincaré | 180 |
| 1.10. Le théorème de densité spectrale | 180 |
| 1.11. Des filtrations | 182 |
| 1.12. Plan de l'article | 183 |
| 1.13. Des choix | 184 |
| 2. Représentations des espaces tordus | 185 |
| 2.1. Conventions | 185 |
| 2.2. Les données | 185 |
| 2.3. ω -représentations de G^\natural | 187 |
| 2.4. Les représentations $\pi(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ | 188 |
| 2.5. Le foncteur ι_k pour $k \geq 1$ | 189 |
| 2.6. L'invariant $s(\Pi)$ | 190 |
| 2.7. L'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(G^\natural, \omega)$ | 192 |
| 2.8. $(\mathcal{H}^\natural, \omega)$ -modules et $(\mathcal{H}_K^\natural, \omega)$ -modules | 194 |

| | |
|---|------------|
| 2.9. Les caractères Θ_{Π} | 197 |
| 2.10. Induction parabolique et restriction de Jacquet | 198 |
| 2.11. Contragrédiente | 201 |
| 2.12. Caractères non ramifiés | 203 |
| 2.13. Quotient de Langlands | 206 |
| 2.14. Décomposition de Langlands | 207 |
| 2.15. Support cuspidal et caractères infinitésimaux | 210 |
| 2.16. Support inertiel | 211 |
| 2.17. Le « centre » (rappels, cas non tordu) | 213 |
| 2.18. L'anneau $\mathfrak{Z}(G^{\natural}, \omega)$ | 214 |
| 2.19. Action de \mathbb{Z} sur le « centre » | 215 |
| 2.20. « Bons » sous-groupes ouverts compacts de G | 217 |
| 2.21. « Bons » sous-espaces tordus ouverts compacts de G^{\natural} | 219 |
| 2.22. $(H^{\natural}, \omega, B)$ -modules admissibles | 221 |
| 3. Énoncé du résultat | 223 |
| 3.1. Le théorème principal | 223 |
| 3.2. Variante « tempérée » du théorème | 225 |
| 3.3. Variante « finie » du théorème | 226 |
| 4. Réduction à la partie « discrète » de la théorie | 229 |
| 4.1. Le « lemme géométrique » | 229 |
| 4.2. Les espaces $\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q^P, \mathfrak{a}_P^*, etc.$ | 233 |
| 4.3. Les espaces $\mathfrak{a}_{P^{\natural}}, \mathfrak{a}_{Q^{\natural}}^P, \mathfrak{b}_{P^{\natural}}, \mathfrak{b}_{P^{\natural}}^*, etc.$ | 234 |
| 4.4. Les morphismes ${}^{\omega}T_{P^{\natural}, \mathbb{C}}$ | 238 |
| 4.5. Actions duales de $\mathfrak{Z}(G)$ et de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}(G^{\natural})$ | 243 |
| 4.6. Induction parabolique et restriction de Jacquet : morphismes duaux | 245 |
| 4.7. Terme constant et caractères des induites paraboliques | 247 |
| 4.8. Le théorème principal sur la partie « discrète » | 248 |
| 4.9. Réduction du théorème principal 3.1.2 au Théorème 4.8.1 | 249 |
| 5. Le théorème de Paley-Wiener sur la partie discrète | 251 |
| 5.1. Support cuspidal des représentations discrètes | 251 |
| 5.2. Un résultat de finitude | 252 |
| 5.3. Décomposition des fonctions régulières | 253 |
| 5.4. Une conséquence du lemme de décomposition | 255 |
| 5.5. La partie $\Theta' = \Theta_{G^{\natural}, \omega}^{\text{dis}}(\mathfrak{s})$ de $\Theta = \Theta(\mathfrak{s})$ est constructible | 258 |
| 5.6. Décomposition des espaces $\mathcal{F}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ et $\mathcal{F}_{\text{tr}}^{\text{dis}}(G^{\natural}, \omega)$ | 259 |
| 5.7. Surjectivité dans le Théorème 4.8.1 | 261 |
| 6. Le théorème de densité spectrale sur la partie discrète | 263 |
| 6.1. Trace tordue pour les modules projectifs de type fini | 263 |
| 6.2. Trace tordue (suite) | 267 |
| 6.3. L'isomorphisme $\mathcal{C}'(A^{\natural}) \simeq \bar{A}^{\natural}$ | 270 |
| 6.4. Variante (sur la condition de projectivité) | 275 |