386 ASTÉRISQUE

2017

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF CONNEXE $\mathfrak{p}$-ADIQUE

Bertrand Lemaire
Guy Henniart

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France

Numéro 386

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille CEDEX 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 55 € ($ 82)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, *hors Europe :* 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris CEDEX 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85629-851-0

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ASTÉRISQUE 386

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF CONNEXE $\mathfrak{p}$-ADIQUE

Bertrand Lemaire
Guy Henniart

Société Mathématique de France 2017
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

B. Lemaire
Aix-Marseille Université, Département de Mathématiques, 163 Avenue de Luminy, Case 901, 13288 - Marseille, France.
E-mail : `bertrand.lemaire@univ-amu.fr`

G. Henniart
Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `Guy.Henniart@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Corps local non archimédien, caractère-distribution, espace tordu, caractère (tordu), élément quasi-semi-simple, élément quasi-régulier, fonction caractère, formule d'intégration de Weyl, groupe réductif, intégrale orbitale, représentation admissible, théorème de densité spectrale, transformée de Fourier, théorème de Paley-Wiener.

REPRÉSENTATIONS DES ESPACES TORDUS SUR UN GROUPE RÉDUCTIF CONNEXE $\mathfrak{p}$-ADIQUE

Bertrand Lemaire, Guy Henniart

Résumé. — Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique quelconque. Soient G un groupe réductif connexe défini sur F, et $G^\natural$ un G-espace tordu lui aussi défini sur F. On suppose que l'ensemble $G^\natural(F)$ n'est pas vide, et on le munit de la topologie définie par F. On fixe un caractère ω (i.e. un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$) de $G(F)$. Dans ce mémoire, on développe la théorie des ω-représentations (complexes, lisses) de $G^\natural(F)$ à partir de celle des représentations de $G(F)$. Une ω-représentation de $G^\natural(F)$ est par définition la donnée d'une représentation (π, V) de $G(F)$ et d'une application Π de $G^\natural(F)$ dans le groupe des $\mathbb{C}$-automorphismes de V telle que $\Pi(x\cdot\delta\cdot y) = \pi(x)\circ\Pi(\delta)\circ(\omega\pi)(y)$ pour tout $\delta\in G^\natural(F)$ et tous x, $y\in G(F)$. Si la représentation sous-jacente π de $G(F)$ est admissible, on peut définir le caractère Θ_Π de Π, qui est une distribution sur $G^\natural(F)$. Les principaux résultats prouvés dans ce mémoire sont :

— si π est de longueur finie, alors la distribution Θ_Π est donnée par une fonction localement constante sur l'ouvert des éléments (quasi-)réguliers de $G^\natural(F)$;

— le théorème de Paley-Wiener scalaire, qui décrit l'image de la transformée de Fourier – l'application qui à une fonction localement constante et à support compact ϕ sur $G^\natural(F)$ associe la forme linéaire $\Pi\mapsto\Theta_\Pi(\phi)$ sur un groupe de Grothendieck adéquat ;

— le théorème de densité spectrale, qui décrit le noyau de la transformée de Fourier.

***Abstract* (Representations of twisted spaces on a connected reductive $\mathfrak{p}$-adic group)**

Let F be a locally compact non-Archimedean field, of any characteristic. Let G be a connected reductive group defined over F, and $G^\natural$ be a twisted G-space also defined over F. The set $G^\natural(F)$ is assumed to be non-empty, and it is endowed with the topology defined by F. We fix a character ω (i.e. a continuous homomorphism in $\mathbb{C}^\times$) of $G(F)$. In this memoir, we study the theory of (complex, smooth) ω-representations of $G^\natural(F)$, from that of representations of $G(F)$. An ω-representation of $G^\natural(F)$ is given by a representation (π, V) of $G(F)$ and a map Π from $G^\natural(F)$ into the group of $\mathbb{C}$-automorphisms of V, such that $\Pi(x \cdot \delta \cdot y) = \pi(x) \circ \Pi(\delta) \circ (\omega\pi)(y)$ for all $\delta \in G^\natural(F)$ and all x, $y \in G(F)$. If the underlying representation π of $G(F)$ is admissible, we can define the character Θ_Π of Π, which is a distribution on $G^\natural(F)$. The main results proved in this memoir are:

— if π is of finite length, then the distribution Θ_Π is given by a locally constant function on the open set of (quasi-)regular elements in $G^\natural(F)$;

— the scalar Paley-Wiener theorem, which describes the image of the Fourier transform – the map which associate to a compactly supported locally constant function ϕ on $G^\natural(F)$ the linear form $\Pi \mapsto \Theta_\Pi(\phi)$ on a suitable Grothendieck group;

— the spectral density theorem, which describes the kernel of the Fourier transform.

TABLE DES MATIÈRES