

**387**

**ASTÉRISQUE**

**2017**

FEYNMAN CATEGORIES

Ralph M. KAUFMANN & Benjamin C. WARD

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 387, 2017

---

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES      Philippe EYSSIDIEUX  
Viviane BALADI    Damien GABORIAU  
Laurent BERGER    Michael HARRIS  
Philippe BIANE     Fabrice PLANCHON  
Hélène ESNAULT    Pierre SCHAPIRA  
Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:christian.smf@cirm-math.fr">christian.smf@cirm-math.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

*Tarifs*

*Vente au numéro*: 40 € (\$ 60)

*Abonnement électronique* : 500 € (\$ 750)

*Abonnement avec supplément papier* : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96

[astsmf@ihp.fr](mailto:astsmf@ihp.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85626-852-7

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

---

**387**

**ASTÉRISQUE**

**2017**

**FEYNMAN CATEGORIES**

Ralph M. KAUFMANN & Benjamin C. WARD

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Ralph M. Kaufmann*

Purdue University Department of Mathematics, West Lafayette, IN 47907, USA  
rkaufman@math.purdue.edu

*Benjamin C. Ward*

Stockholm University, Stockholm Sweden 106-91  
bward@math.su.se

---

**Mathematical classification by subject (2000).** — 18D10, 55U35, 18D99, 55P48, 18D50, 81Q05, 18C15, 18D20, 18D25, 18G55, 55U40, 81T30, 81T18, 16T10, 16T05.

**Keywords.** — Feynman category, model category, monoidal category, monoidal functor, graph, Kan extension, operads, PROPs, modular operads, twisted modular operads, universal operations, Gerstenhaber bracket, pre-Lie algebra, BV algebra, bi-algebra, Hopf algebra, bar transform, cobar transform, Feynman transform, master equation, operadic, plus construction, enriched category, Quillen adjunction, W construction.

# FEYNMAN CATEGORIES

by Ralph M. KAUFMANN & Benjamin C. WARD

*Abstract.* — In this book we give a new foundational, categorical formulation for operations and relations and objects parameterizing them. This generalizes and unifies the theory of operads and all their cousins including but not limited to PROPs, modular operads, twisted (modular) operads, properads, hyperoperads, their colored versions, as well as algebras over operads and an abundance of other related structures, such as crossed simplicial groups, the augmented simplicial category or FI-modules.

The usefulness of this approach is that it allows us to handle all the classical as well as more esoteric structures under a common framework and we can treat all the situations simultaneously. Many of the known constructions simply become Kan extensions.

In this common framework, we also derive universal operations, such as those underlying Deligne's conjecture, construct Hopf algebras as well as perform resolutions, (co)bar transforms and Feynman transforms which are related to master equations. For these applications, we construct the relevant model category structures. This produces many new examples.

*Résumé.* — Dans ce livre nous proposons une nouvelle fondation catégorielle concernant des opérations et leurs relations ainsi que leurs objets paramétrisants. Cela généralise et en même temps unifie les théories d'une part des opérades et tous leurs cousins, soit les PROPs, les opérades (modulaires) tordues, les properades, les hyperopérades, leurs variantes colorées, ou encore les algèbres sur une opérade fixée, etc., et d'autre part une multitude de structures similaires comme les groupes simpliciaux croisés, la catégorie simpliciale enrichie ou les modules FI. L'utilité de cette approche se montre dans la possibilité de traiter dans un cadre commun de la même manière toutes les structures classiques ainsi que des exemples plus ésotériques. Dans cette manière, beaucoup de constructions connues se présentent comme des extensions de Kan.

Dans ce cadre commun, nous pouvons dériver des opérations universelles, comme les opérations qui font part de la conjecture de Deligne, construire des algèbres de Hopf, et aussi réaliser des résolutions, les transformes bar, cobar et Feynman, qui sont

liées aux équations maîtresses. Afin de développer ces exemples, nous construisons les structures de modèle pour les catégories pertinentes. Ceci donne une abondance des exemples nouveaux.

# CONTENTS

<b>Introduction</b> .....	1
0.1. General overview and background .....	1
0.2. Main definition .....	3
0.3. Examples .....	4
0.4. Discussion of the results .....	7
0.5. Organization of the text .....	16
Acknowledgments .....	19
Conventions and notations .....	19
<b>1. Feynman categories</b> .....	21
1.1. Feynman categories—the definition .....	21
1.2. (Re)-Construction .....	22
1.3. Surjections: A simple, but not too simple, example $\mathfrak{F}_{\text{surj}}$ .....	23
1.4. Induced structures .....	24
1.5. Functors as a generalization of operads and $\mathbb{S}$ -modules: <i>Ops</i> and <i>Mods</i> .....	26
1.6. Morphisms of Feynman categories .....	29
1.7. Other relevant notions .....	31
1.8. Weaker, alternative and Cartesian enriched notions of Feynman categories .....	32
1.9. Weak Feynman categories and indexed enriched Feynman categories .....	36
1.10. Connection to Feynman graphs and physics .....	38
1.11. Discussion and relation to other structures .....	38
<b>2. Examples</b> .....	41
2.1. The Feynman category $\mathfrak{G} = (\text{Cul}, \text{Agg}, \iota)$ and categories indexed over it .....	42
2.2. Feynman categories indexed over $\mathfrak{G}^{\text{dir}}$ .....	45
2.3. Feynman categories indexed over $\mathfrak{G}$ .....	49
2.4. More functors .....	51
2.5. Colored versions .....	51
2.6. Planar versions .....	51
2.7. Not so classical examples .....	53
2.8. <i>Ops</i> with special elements: units and multiplication .....	55
2.9. Truncation, stability, and the role of 0, 1, 2 flag corollas .....	56

2.10. Feynman categories with trivial $\mathcal{V}$ .....	58
2.11. Remarks on relations to similar notions .....	59
<b>3. General constructions</b> .....	<b>61</b>
3.1. Free monoidal construction $\mathcal{F}^{\boxtimes}$ .....	61
3.2. NC-construction .....	61
3.3. $\mathcal{F}_{\text{deco}}$ : Decorated Feynman categories .....	63
3.4. Iterating Feynman categories .....	66
3.5. Arrow category .....	68
3.6. Feynman level category $\mathfrak{F}^+$ .....	68
3.7. Feynman hyper category $\mathfrak{F}^{\text{hyp}}$ .....	70
<b>4. Indexed Enriched Feynman categories, (odd) twists and Hopf algebras</b> .....	<b>73</b>
4.1. Enrichment functors .....	73
4.2. Indexed Feynman $\mathcal{A}b$ -Categories: Orientations and Odd $\mathcal{O}ps$ .....	77
4.3. Examples .....	78
4.4. A Connes-Kreimer style bi-algebra/Hopf algebra structure .....	79
<b>5. Feynman categories given by generators and relations</b> .....	<b>83</b>
5.1. Structure of $\mathfrak{G}$ .....	83
5.2. Odd versions for Feynman categories with ordered presentations .....	86
<b>6. Universal Operations</b> .....	<b>91</b>
6.1. Cocompletion and the universal Feynman category .....	91
6.2. Enriched Versions .....	93
6.3. Cocompletion for $\mathcal{O}ps$ .....	94
6.4. Generators and weak generators .....	94
6.5. Feynman categories indexed over $\mathfrak{G}$ .....	94
6.6. Gerstenhaber's construction and its generalizations in terms of Feynman categories .....	95
6.7. Collecting results .....	97
6.8. Dual construction $\mathcal{F}^{\vee}$ .....	97
6.9. Infinitesimal automorphism group, graph complex and $\mathfrak{g}rt$ .....	98
6.10. Universal operations in iterated Feynman categories .....	99
<b>7. Feynman transform, the (co)bar construction and Master Equations</b> .....	<b>101</b>
7.1. Preliminaries .....	101
7.2. Graded Feynman categories .....	102
7.3. The differential .....	104
7.4. The (Co)bar construction and the Feynman transform .....	106
7.5. A general master equation .....	109
<b>8. Homotopy theory of <math>\mathcal{F}\text{-}\mathcal{O}ps_{\mathcal{C}}</math></b> .....	<b>113</b>
8.1. Preliminaries .....	113
8.2. The Model Structure .....	121



8.3. Quillen adjunctions from morphisms of Feynman categories .....	127
8.4. Cofibrant objects .....	128
8.5. Homotopy classes of maps and master equations .....	130
8.6. W Construction .....	133
<b>A. Graph Glossary .....</b>	<b>139</b>
A.1. The category of graphs .....	139
A.2. Extra structures .....	141
A.3. Flag killing and leaf operators; insertion operations .....	145
<b>B. Topological Model Structure .....</b>	<b>147</b>
<b>Bibliography .....</b>	<b>155</b>

