

**390**

**ASTÉRISQUE**

**2017**

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2015/2016  
EXPOSÉS 1104–1119

Avec table par noms d'auteurs de 1948/49 à 2015/16

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES	Philippe EYSSIDIEUX
Viviane BALADI	Damien GABORIAU
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Fabrice PLANCHON
Hélène ESNAULT	Pierre SCHAPIRA

Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:christian.smf@cirm-math.fr">christian.smf@cirm-math.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

*Tarifs*

*Vente au numéro*: 65 € (\$97)  
*Abonnement électronique* : 500 € (\$750)  
*Abonnement avec supplément papier* : 657 €, hors Europe : 699 € (\$1049)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96  
[astsmf@ihp.fr](mailto:astsmf@ihp.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926  
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

---

**390**

**ASTÉRISQUE**

**2017**

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2015/2016  
EXPOSÉS 1104–1119

Avec table par noms d'auteurs de 1948/49 à 2015/16

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.

École normale supérieure,

45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

URL : <http://www.bourbaki.ens.fr>

---

*Mots-clefs et classification mathématique par sujets (2000)*

**Exposé n° 1104.** — Période, transcendance, cohomologie, motif, groupe de Galois motivique, théorie tannakienne — 11H99, 14C30, 14F42, 18G55, 19E15, 32G20.

**Exposé n° 1105.** — Fibré cotangent orbifolde, feuilletage singulier, intégrabilité algébrique, espace de modules de variétés canoniquement polarisées — 32F75, 14E20, 14D22.

**Exposé n° 1106.** — Groupes de transformations, conjecture de Hilbert-Smith, 5ème problème de Hilbert, variété de dimension 3, variétés ouvertes — 57S10, 57M60, 57S05, 57N10, 54H15, 55M35.

**Exposé n° 1107.** — Laplacien, résonances, dynamique hyperbolique — 35P20, 35P25.

**Exposé n° 1108.** — Systèmes dynamiques, théorie ergodique, entropie métrique, entropie topologique, entropie sofique, groupes sofiques — 37A35, 28D, 37A15, 37B, 20E15.

**Exposé n° 1109.** — D-modules, dualité de Langlands, champs des modules des fibrés — 14F05, 14H60.

**Exposé n° 1110.** — Correspondance de Langlands, corps de fonctions, formes automorphes, représentations galoisiennes, chtoucas, équivalence de Satake géométrique, théorie du corps de classe géométrique — 11S37, 14D24, 22E55, 22E57.

**Exposé n° 1111.** — Théorie des déformations, problèmes de modules, dg-algèbres de Lie, géométrie dérivée, dualité de Koszul — 14B12, 18G55, 14A20.

**Exposé n° 1112.** — Variational method, Monge-Ampère equation, Kähler-Einstein metric, plurisubharmonic potential, Fano variety, Tian-Yau-Donaldson conjecture, Donaldson-Futaki invariant,  $K$ -stability, space of Kähler potentials, Aubin functional, Mabuchi functional, Ding functional — 53C55, 32J27, 32P05.

**Exposé n° 1113.** — Géométrie sous-riemannienne, courbes horizontales singulières, géodésiques singulières minimisantes, conjecture de Sard — 53C17 49K21 28A15.

**Exposé n° 1114.** — NIP, Keisler measures, distal theories, Erdős-Hajnal Conjecture, Regularity lemma, VC-dimension — 03C68, 03C45, 03C98, 05C69, 05D10, 28E05.

**Exposé n° 1115.** — Perverse sheaves, decomposition theorem, Hodge theory — 58A14, 32S60, 32S35, 55N33.

**Exposé n° 1116.** — Lignes nodales, processus gaussiens, polynômes aléatoires — 60G15, 60G60, 35B05, 34L20, 58J40.

**Exposé n° 1117.** — Systèmes linéaires sous-déterminés, parcimonie, matrices aléatoires — 52B55, 62H12, 42B05.

**Exposé n° 1118.** — Flot binormal, solutions auto-similaires, stabilité, dynamique singulière, transformation de Hasimoto, équation de Schrödinger non linéaire — 35Q55, 35C06, 35B35, 76B47, 76B03.

**Exposé n° 1119.** — Multiplicative functions, short intervals, sign patterns — 11N25, 11N64.

---

**SÉMINAIRE BOURBAKI**  
**VOLUME 2015/2016**  
**EXPOSÉS 1104-1119**

*Résumé.* — Ce 68<sup>e</sup> volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des seize exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2015/2016 : combinatoire et propriété d'indépendance en théorie des modèles, entropie sofique, résolution de systèmes linéaires sous-déterminés, flot binormal et équation de Schrödinger, conjecture de Hilbert-Smith en géométrie différentielle, géométrie sous-riemannienne, équation de Monge-Ampère en géométrie algébrique complexe, motifs et périodes, problèmes de modules formels, programme de Langlands géométrique, théorie analytique des nombres, théorie de Hodge du théorème de décomposition, théorie spectrale.

**Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2015/2016, exposés 1104–1119)**

This 68th volume of the Bourbaki Seminar contains the texts of the sixteen survey lectures done during the year 2015/2016: analytic number theory, binormal flow and the Schrödinger equation, combinatorics and the independence property in model theory, formal moduli problems, geometric Langlands program, Hilbert-Smith conjecture in differential geometry, Hodge theory of the decomposition theorem, Monge-Ampère equation in complex algebraic geometry, motives and periods, resolution of underdetermined linear systems, sofic entropy, subriemannian geometry, spectral theory.



Résumés des exposés .....	vii
---------------------------	-----

## NOVEMBRE 2015

1104	Yves ANDRÉ — <i>Groupes de Galois motiviques et périodes</i> .....	1
1105	Benoît CLAUDON — <i>Positivité du cotangent logarithmique et conjecture de Shafarevich-Viehweg (d'après Campana, Păun, Taji...)</i> .....	27
1106	Sylvain MAILLOT — <i>Conjecture de Hilbert-Smith en dimension 3 (d'après J. Pardon)</i> .....	65
1107	Frédéric NAUD — <i>Bornes de Weyl fractales et résonances (d'après Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski [39, 38])</i> .....	77

## JANVIER 2016

1108	Damien GABORIAU — <i>Entropie sofique (d'après Lewis Bowen, David Kerr et Hanfeng Li)</i> .....	101
1109	Dennis GAITSGORY — <i>Progrès récents dans la théorie de Langlands géométrique</i> .....	139
1110	Benoît STROH — <i>La paramétrisation de Langlands globale sur les corps de fonctions (d'après Vincent Lafforgue)</i> .....	169
1111	Bertrand TOËN — <i>Problèmes de modules formels (d'après Drinfeld, Kontsevich, Hinich, Manetti, Pridham, Lurie...)</i> .....	199

## MARS 2016

1112	Jean-Pierre DEMAILLY — <i>Variational approach for complex Monge-Ampère equations and geometric applications (after Berman, Berndtsson, Boucksom, Eyssidieux, Guedj, Jonsson, Zeriahi...)</i> .....	245
1113	Ludovic RIFFORD — <i>Singulières minimisantes en géométrie sous-riemannienne (d'après Hakavuori, Le Donne, Leonardi, Monti...)</i> .....	277
1114	Sergei STARSHENKO — <i>NIP, Keisler measures and combinatorics (after S. Shelah, H. J. Keisler, E. Hrushovski, Y. Peterzil, A. Pillay, P. Simon...)</i> .....	303

1115	Geordie WILLIAMSON — <i>The Hodge theory of the Decomposition Theorem (after M. A. de Cataldo and L. Migliorini)</i> .....	335
<i>JUIN 2016</i>		
1116	Nalini ANANTHARAMAN — <i>Topologie des hypersurfaces nodales de fonctions aléatoires gaussiennes (d'après Nazarov et Sodin, Gayet et Welschinger)</i> .....	369
1117	Francis BACH — <i>Parcimonie et systèmes linéaires sous-déterminés (d'après Emmanuel Candès)</i> .....	409
1118	Evelyne MIOT — <i>Le flot binormal, l'équation de Schrödinger et les tourbillons filamentaires (d'après Valeria Banica et Luis Vega)</i> .	427
1119	Kannan SOUNDARARAJAN — <i>The Liouville function in short intervals (after Matomäki and Radziwiłł)</i> .....	453
	Table par noms d'auteurs .....	481



Yves ANDRÉ — *Groupes de Galois motiviques et périodes*

Dans les années 60, A. Grothendieck a proposé une vaste généralisation de la théorie de Galois aux systèmes de polynômes en plusieurs variables (la théorie de Galois motivique), et introduit à cette occasion les catégories tannakiennes. En caractéristique nulle, diverses approches ont permis de s'affanchir des conjectures standard et de construire une théorie inconditionnelle.

Celle de J. Ayoub, qui s'appuie sur la théorie des motifs mixtes de V. Voevodsky et une nouvelle théorie tannakienne, est la plus précise. Elle offre une nouvelle perspective sur les périodes des variétés algébriques, et montre notamment que les relations polynomiales qui lient les périodes d'un pinceau de variétés algébriques complexes s'expliquent toujours par la formule de Stokes.

Benoît CLAUDON — *Positivité du cotangent logarithmique et conjecture de Shafarevich-Viehweg (d'après Campana, Păun, Taji...)*

Démontrée par A. Parshin et S. Arakelov au début des années 1970, la conjecture d'hyperbolicité de Shafarevich affirme qu'une famille de courbes de genre  $g \geq 2$  paramétrée par une courbe non hyperbolique (c'est-à-dire isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^*$  ou une courbe elliptique) est automatiquement isotriviale : les modules des fibres lisses sont constants. En dimension supérieure, les travaux de E. Viehweg sur les modules des variétés canoniquement polarisées l'ont amené à formuler la généralisation suivante : si une famille de variétés canoniquement polarisées (paramétrée par une base quasi-projective) est de variation maximale, alors la base est de log-type général. Il s'agit donc d'une forme d'hyperbolicité algébrique attendue pour l'espace des modules.

En adaptant des résultats dus à Y. Miyaoka sur la semi-positivité générique du fibré cotangent au cadre logarithmique (et orbifold), F. Campana et M. Păun ont récemment obtenu une réponse positive à la conjecture de Viehweg. Cet exposé sera également l'occasion de donner un aperçu de la classification des orbifolides développée par F. Campana. C'est d'ailleurs dans ce cadre que s'énonce la forme optimale de la conjecture de Viehweg démontrée par B. Taji.

Sylvain MAILLOT — *Conjecture de Hilbert-Smith en dimension 3 (d'après J. Pardon)*

La conjecture de Hilbert-Smith en dimension  $n$  affirme que, si  $G$  est un groupe topologique localement compact qui admet une injection continue dans le groupe d'homéomorphismes d'une variété connexe de dimension  $n$ , alors  $G$  est un groupe de Lie. Nous décrivons la preuve du cas  $n = 3$ , due à J. Pardon. Cette preuve utilise des outils divers tels que l'homologie de Čech, la topologie des variétés de dimension 3, la théorie des surfaces minimales et des résultats de J. Nielsen sur les groupes modulaires des surfaces hyperboliques.

Frédéric NAUD — *Bornes de Weyl fractales et résonances (d'après Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski [39, 38])*

Hermann Weyl a démontré en 1911 un théorème remarquable sur la répartition asymptotique des valeurs propres du laplacien pour les domaines compacts à bord dans l'espace euclidien. Dans le cas des domaines non compacts de volume infini, il existe une notion naturelle qui généralise celle de valeur propre : les résonances. Les résonances forment un ensemble discret de nombres complexes dont les parties réelles sont liées à une fréquence d'oscillation tandis que la partie imaginaire traduit un taux d'amortissement. Un travail récent de Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski établit des bornes supérieures sur la densité des résonances lorsqu'on les compte dans une bande horizontale du plan complexe. Le taux

de croissance fait apparaître, contrairement à la loi de Weyl classique, un exposant « non entier » lié à la dimension de Minkowski des trajectoires captées : c'est ce qu'on appelle une borne de Weyl « fractale ». Nous ferons une introduction à la notion de résonance et mettrons en perspective le travail de N-S-Z en faisant un historique des résultats précédents de la théorie.

Damien GABORIAU — *Entropie sofique (d'après Lewis Bowen, David Kerr et Hanfeng Li)*

L'entropie fut introduite en systèmes dynamiques par A. Kolmogorov. Initialement focalisée sur les itérations d'une transformation préservant une mesure finie, la notion fut peu à peu généralisée, jusqu'à embrasser les actions des groupes moyennables ainsi que les actions topologiques. L. Bowen (2008) parvint à franchir la barrière du non moyennable en introduisant l'entropie sofique. Cet invariant rend les mêmes services que l'entropie classique pour les actions mesurées des groupes sofiques (une classe qui contient les groupes résiduellement finis). En 2010, D. Kerr et H. Li mirent au point une version topologique et un principe variationnel.

Dennis GAITSGORY — *Progrès récents dans la théorie de Langlands géométrique*

L'objectif de la correspondance de Langlands classique est de classifier les représentations automorphes irréductibles en termes des homomorphismes du groupe de Galois vers le groupe dual. Dans la situation géométrique, on peut interpréter la correspondance de Langlands comme une équivalence entre certaines catégories dérivées : celle des D-modules du côté automorphe et celle des faisceaux quasi cohérents du côté galoisien. La démonstration d'une telle équivalence qu'on propose réunit les méthodes de la théorie classique des formes automorphes et les idées modernes de la physique mathématique et de la théorie des catégories supérieures.

Benoît STROH — *La paramétrisation de Langlands globale sur les corps de fonctions (d'après Vincent Lafforgue)*

La moitié de la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions prédit qu'à toute représentation automorphe des points adéliques d'un groupe  $G$  on peut associer un système local sur un ouvert de la courbe projective lisse considérée sur un corps fini. Ce système local est de plus censé être réalisé par des cocycles à valeurs dans le groupe dual de  $G$ . C'est ce qu'a démontré récemment Vincent Lafforgue et que nous tâcherons d'expliquer. Dans le cas où  $G$  est le groupe linéaire, ceci était dû à Laurent Lafforgue par une méthode fondamentalement différente.

Bertrand TOËN — *Problèmes de modules formels (d'après Drinfeld, Kontsevich, Hinich, Manetti, Pridham, Lurie...)*

Le thème principal de cet exposé est la théorie des déformations (formelles), dont l'objet est l'étude des familles algébriques de structures variées et paramétrées par des anneaux artiniens. Nous expliquerons comment des idées dues à V. Drinfeld (et développées par V. Hinich, K. Behrend, M. Mannetti, M. Kontsevich, J. Lurie et bien d'autres) ont amené à remplacer les anneaux artiniens par des dg-anneaux artiniens, et à introduire la notion de problème de modules formel, qui fournit un cadre pertinent pour la théorie des déformations. En particulier, nous présenterons un des points culminants de cette approche, à savoir la construction par J. Lurie d'une équivalence entre les problèmes de modules formels et les dg-algèbres de Lie, ainsi que certaines de ses variantes et ses liens avec la dualité de Koszul. Nous mentionnerons par ailleurs quelques contreparties globales comme par exemple le lien