

**Vincent Guirardel  
Gilbert Levitt**

---

**JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS**

---

**ASTÉRISQUE 395**

**Société Mathématique de France 2017**

---

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France  
Numéro 395

---

**Comité de rédaction**

Ahmed ABBES	Philippe EYSSIDIEUX
Viviane BALADI	Damien GABORIAU
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Fabrice PLANCHON
Hélène ESNAULT	Pierre SCHAPIRA

Éric VASSEROT (dir.)

**Diffusion**

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:christian.smf@cirm-math.fr">christian.smf@cirm-math.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

**Tarifs 2017**

Vente au numéro : 40 € (\$ 60)  
Abonnement électronique : 500 € (\$ 750)  
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

**Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
[astsmf@ihp.fr](mailto:astsmf@ihp.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)  
ISBN 978-2-85629-870-1

Stéphane SEURET  
Directeur de la publication

---

ASTÉRIQUE 395

**JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS**

**Vincent Guirardel**

**Gilbert Levitt**

**Société Mathématique de France 2017**

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*V. Guirardel*

Institut de Recherche Mathématique de Rennes,  
Université de Rennes 1 et CNRS (UMR 6625),  
263 avenue du Général Leclerc, CS 74205, F-35042 RENNES Cédex, France.

*E-mail* : `vincent.guirardel@univ-rennes1.fr`

*G. Levitt*

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO),  
Université de Caen et CNRS (UMR 6139), (Pour Shanghai : Normandie Univ,  
UNICAEN, CNRS, LMNO, 14000 Caen, France).

*E-mail* : `levitt@unicaen.fr`

---

**2010 Mathematics Subject Classification.** — 20E08, 20E34, 20F65, 20F67, 57M07, 20E06.

**Key words and phrases.** — Group, splitting, decomposition, tree, R-tree, outer space, compatibility, acylindricity, slender, hyperbolic, amalgamated product, HNN extension.

---

The first author acknowledges support from the Institut universitaire de France, ANR project ANR-11-BS01-013, and membership to the Henri Lebesgue center 11-LABX-0020. The second author acknowledges support from ANR-07-BLAN-0141-01 and ANR-2010-BLAN-116-03.

# JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS

Vincent Guirardel, Gilbert Levitt

**Abstract.** — This is an account of the theory of JSJ decompositions of finitely generated groups, as developed in the last twenty years or so.

We give a simple general definition of JSJ decompositions (or rather of their Bass-Serre trees), as maximal universally elliptic trees. In general, there is no preferred JSJ decomposition, and the right object to consider is the whole set of JSJ decompositions, which forms a contractible space: the JSJ deformation space (analogous to Outer Space).

We prove that JSJ decompositions exist for any finitely presented group, without any assumption on edge groups. When edge groups are slender, we describe flexible vertices of JSJ decompositions as quadratically hanging extensions of 2-orbifold groups.

Similar results hold in the presence of acylindricity, in particular for splittings of torsion-free CSA groups over abelian groups, and splittings of relatively hyperbolic groups over virtually cyclic or parabolic subgroups. Using trees of cylinders, we obtain canonical JSJ trees (which are invariant under automorphisms).

We introduce a variant in which the property of being universally elliptic is replaced by the more restrictive and rigid property of being universally compatible. This yields a canonical compatibility JSJ tree, not just a deformation space. We show that it exists for any finitely presented group.

We give many examples, and we work throughout with relative decompositions (restricting to trees where certain subgroups are elliptic).

**Résumé (Décompositions JSJ des groupes).** — Ce texte expose la théorie des décompositions JSJ des groupes de type fini, telle qu'elle s'est développée depuis une vingtaine d'années.

Nous donnons une définition simple et générale des décompositions JSJ (plus précisément, de leurs arbres de Bass-Serre) comme arbres universellement elliptiques maximaux. En général il n'y a pas de décomposition privilégiée, et le bon objet à considérer est l'ensemble de toutes les décompositions JSJ, qui forment un espace contractile, l'espace de déformation JSJ (analogue à l'outre-espace).

Nous montrons que tout groupe de présentation finie a des décompositions JSJ, sans hypothèse sur les groupes d'arêtes. Lorsque les groupes d'arêtes sont sveltes,

nous décrivons les sommets flexibles des décompositions JSJ : ce sont des extensions de groupes de 2-orbifolds, attachées de manière quadratique.

Il y a des résultats analogues en présence d'acylindricité, en particulier pour les scindements abéliens des groupes CSA sans torsion, et les scindements des groupes relativement hyperboliques sur des sous-groupes cycliques ou paraboliques. En utilisant les arbres des cylindres, nous obtenons des décompositions JSJ canoniques, invariantes par automorphismes.

Nous introduisons une variante dans laquelle l'ellipticité universelle est remplacée par la compatibilité universelle, qui est plus restrictive et plus rigide. On obtient ainsi un arbre de compatibilité JSJ canonique (pas seulement un espace de déformation), qui existe toujours lorsque le groupe est de présentation finie.

Nous donnons de nombreux exemples, et nous traitons complètement le cas relatif (on se restreint aux arbres dans lesquels certains sous-groupes donnés sont elliptiques).

## CONTENTS

<b>Introduction</b> .....	1
1. From 3-manifolds to groups .....	1
2. Definition of JSJ decompositions .....	3
3. Existence .....	5
4. Uniqueness .....	5
JSJ trees are not unique. . . . .	5
. . . but sometimes there is a canonical JSJ tree .....	6
5. Description: Quadratically hanging vertex groups .....	7
6. Relative decompositions .....	9
7. Acylindricity .....	9
8. Compatibility JSJ .....	11
9. Contents of the book .....	13
10. What is new .....	16
<b>PART I. Preliminaries</b> .....	19
1.1. Basic notions and notations .....	19
1.2. Trees .....	20
1.3. $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ -trees, one-endedness .....	22
1.4. Maps between trees, compatibility, deformation spaces .....	23
1.5. Slenderness, smallness .....	24
1.6. Accessibility .....	26
1.7. Relative finite generation and presentation .....	26
<b>PART II. The JSJ deformation space</b> .....	29
2. Definition and existence .....	29
2.1. Standard refinements .....	29
2.2. Universal ellipticity .....	32
2.3. The JSJ deformation space .....	33
2.4. Existence of the JSJ deformation space: the non-relative case .....	34

2.5. Existence: the relative case	35
2.6. Relation with other constructions	38
3. Examples of JSJ decompositions	39
3.1. Free groups	39
3.2. Free splittings: the Grushko deformation space	39
3.3. Splittings over finite groups: the Stallings-Dunwoody deformation space	40
3.4. Splittings of small groups	40
3.5. Generalized Baumslag-Solitar groups	41
3.6. Locally finite trees	41
3.7. RAAGs	42
3.8. Parabolic splittings	42
3.9. Non-rigid examples	43
4. A few useful facts	44
4.1. Changing edge groups	44
4.2. Incidence structures of vertex groups	46
4.3. JSJ decompositions of vertex groups	48
4.4. Relative JSJ decompositions through fillings	50
<b>PART III. Flexible vertices</b>	53
5. Quadratically hanging vertices	54
5.1. 2-orbifolds and their splittings	54
5.2. Definition and properties of quadratically hanging subgroups	61
5.3. Quadratically hanging subgroups are elliptic in the JSJ	65
5.4. Peripheral structure of quadratically hanging vertices	68
5.5. Flexible vertices of abelian JSJ decompositions	70
6. JSJ decompositions over slender groups	71
6.1. Statement of results	71
6.2. Reduction to totally flexible groups	74
6.3. Fujiwara-Papasoglu's core	76
6.4. The regular neighborhood	80
6.5. Constructing a filling pair of splittings	84
6.6. Flexible groups are QH when trees are minuscule	88
6.7. All splittings of a totally flexible group are minuscule	89
6.8. Slenderness in trees	91
6.9. Slender flexible groups	92
<b>PART IV. Acylindricity</b>	95
7. Trees of cylinders	96
7.1. Definition	96
7.2. Acylindricity	100
7.3. Small domination	101
7.4. Compatibility	103
8. Constructing JSJ decompositions using acylindricity	104
8.1. Uniform acylindricity	105



8.2. Acylindricity up to small groups .....	112
9. Applications .....	116
9.1. CSA groups .....	117
9.2. $\Gamma$ -limit groups and $K$ -CSA groups .....	118
9.3. Relatively hyperbolic groups .....	121
9.4. Virtually cyclic splittings .....	124
9.5. The $\mathcal{X}_{\max}$ -JSJ decomposition .....	125
<b>PART V. Compatibility</b> .....	131
10. The compatibility JSJ tree .....	131
10.1. Existence of the compatibility JSJ space .....	132
10.2. The compatibility JSJ tree $T_{\text{co}}$ .....	135
11. Examples .....	136
11.1. Free groups .....	136
11.2. Algebraic rigidity .....	137
11.3. Free products .....	137
11.4. (Generalized) Baumslag-Solitar groups .....	137
11.5. The canonical decomposition of Scott and Swarup .....	138
11.6. Poincaré duality groups .....	138
11.7. Trees of cylinders .....	139
<b>Appendix A. <math>\mathbb{R}</math>-trees, length functions, and compatibility</b> .....	143
A.1. Metric trees and length functions .....	143
A.2. From length functions to trees .....	145
A.3. Compatibility and length functions .....	148
A.4. Common refinements .....	151
A.5. Arithmetic of trees .....	152
A.6. Reading actions on $\mathbb{R}$ -trees .....	154
<b>Bibliography</b> .....	157
<b>Index</b> .....	163

