Vincent Guirardel
Gilbert Levitt

JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS

ASTÉRISQUE 395

Société Mathématique de France 2017

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France

Numéro 395

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
`christian.smf@cirm-math.fr`	`www.ams.org`

Tarifs 2017

Vente au numéro : 40 € ($ 60)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, *hors Europe :* 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`astsmf@ihp.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-870-1

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

ASTÉRISQUE 395

JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS

Vincent Guirardel
Gilbert Levitt

Société Mathématique de France 2017
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

V. Guirardel

Institut de Recherche Mathématique de Rennes,
Université de Rennes 1 et CNRS (UMR 6625),
263 avenue du Général Leclerc, CS 74205, F-35042 RENNES Cédex, France.

E-mail : `vincent.guirardel@univ-rennes1.fr`

G. Levitt

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO),
Université de Caen et CNRS (UMR 6139), (Pour Shanghai : Normandie Univ, UNICAEN, CNRS, LMNO, 14000 Caen, France).

E-mail : `levitt@unicaen.fr`

2010 *Mathematics Subject Classification*. — 20E08, 20E34, 20F65, 20F67, 57M07, 20E06.

***Key words and phrases*. —** Group, splitting, decomposition, tree, R-tree, outer space, compatibility, acylindricity, slender, hyperbolic, amalgamated product, HNN extension.

The first author acknowledges support from the Institut universitaire de France, ANR project ANR-11-BS01-013, and membership to the Henri Lebesgue center 11-LABX-0020. The second author acknowledges support from ANR-07-BLAN-0141-01 and ANR-2010-BLAN-116-03.

JSJ DECOMPOSITIONS OF GROUPS

Vincent Guirardel, Gilbert Levitt

***Abstract.* —** This is an account of the theory of JSJ decompositions of finitely generated groups, as developed in the last twenty years or so.

We give a simple general definition of JSJ decompositions (or rather of their Bass-Serre trees), as maximal universally elliptic trees. In general, there is no preferred JSJ decomposition, and the right object to consider is the whole set of JSJ decompositions, which forms a contractible space: the JSJ deformation space (analogous to Outer Space).

We prove that JSJ decompositions exist for any finitely presented group, without any assumption on edge groups. When edge groups are slender, we describe flexible vertices of JSJ decompositions as quadratically hanging extensions of 2-orbifold groups.

Similar results hold in the presence of acylindricity, in particular for splittings of torsion-free CSA groups over abelian groups, and splittings of relatively hyperbolic groups over virtually cyclic or parabolic subgroups. Using trees of cylinders, we obtain canonical JSJ trees (which are invariant under automorphisms).

We introduce a variant in which the property of being universally elliptic is replaced by the more restrictive and rigid property of being universally compatible. This yields a canonical compatibility JSJ tree, not just a deformation space. We show that it exists for any finitely presented group.

We give many examples, and we work throughout with relative decompositions (restricting to trees where certain subgroups are elliptic).

***Résumé* (*Décompositions JSJ des groupes*). —** Ce texte expose la théorie des décompositions JSJ des groupes de type fini, telle qu'elle s'est développée depuis une vingtaine d'années.

Nous donnons une définition simple et générale des décompositions JSJ (plus précisément, de leurs arbres de Bass-Serre) comme arbres universellement elliptiques maximaux. En général il n'y a pas de décomposition privilégiée, et le bon objet à considérer est l'ensemble de toutes les décompositions JSJ, qui forment un espace contractile, l'espace de déformation JSJ (analogue à l'outre-espace).

Nous montrons que tout groupe de présentation finie a des décompositions JSJ, sans hypothèse sur les groupes d'arêtes. Lorsque les groupes d'arêtes sont sveltes, nous décrivons les sommets flexibles des décompositions JSJ : ce sont des extensions de groupes de 2-orbifolds, attachées de manière quadratique.

Il y a des résultats analogues en présence d'acylindricité, en particulier pour les scindements abéliens des groupes CSA sans torsion, et les scindements des groupes relativement hyperboliques sur des sous-groupes cycliques ou paraboliques. En utilisant les arbres des cylindres, nous obtenons des décompositions JSJ canoniques, invariantes par automorphismes.

Nous introduisons une variante dans laquelle l'ellipticité universelle est remplacée par la compatibilité universelle, qui est plus restrictive et plus rigide. On obtient ainsi un arbre de compatibilité JSJ canonique (pas seulement un espace de déformation), qui existe toujours lorsque le groupe est de présentation finie.

Nous donnons de nombreux exemples, et nous traitons complètement le cas relatif (on se restreint aux arbres dans lesquels certains sous-groupes donnés sont elliptiques).

CONTENTS