BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE GILLES LEMARIÉ

# Base d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 117, nº 2 (1989), p. 211-232
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_2_211_0>

*Bull. Soc. math. France,*
117, 1989, p. 211–232.

# BASE D'ONDELETTES SUR LES GROUPES DE LIE STRATIFIÉS

PAR

PIERRE GILLES LEMARIÉ (*)

RÉSUMÉ. — Nous construisons sur les groupes de Lie nilpotents stratifiés une base hilbertienne de $L^2$ composée de fonctions régulières et oscillantes "uniformément" localisées en espace et en fréquence (théorie des ondelettes). Sur certains groupes cette base est composée d'un nombre fini de fonctions et leurs dilatées-translatées "dyadiques". La méthode de construction de cette base repose sur une analyse multi-échelles composée d'espaces de surfaces-splines généralisées.

ABSTRACT. — We construct, on a stratified nilpotent Lie group, an hilbertian basis of $L^2$ formed with regulary and oscillating functions, "uniformly" localized in space and frequency (as in the ondelettes theory). On certain groups this basis is composed from finitely many functions and the functions obtained from them by "dyadic" dilations-translations. The way of constructing this basis lies on a multi-scale analysis composed from generalized spline-surfaces spaces.

## Plan de l'article



## 1. Rappel de la situation abélienne et position du problème

Depuis la théorie des ondelettes développée par les équipes de Y. MEYER et A. GROSSMANN on dispose de nombreuses bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R}^n)$

(*) Texte reçu le 5 novembre 1987.
P. G. LEMARIÉ, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

bâties sur le modèle suivant : la base (appelée *base d'ondelettes*) est construite à partir de $2^n - 1$ fonctions $\psi_\varepsilon$ $(1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1)$ et s'obtient comme la collection des dilatées-translatées dyadiques des $\psi_\varepsilon$, c'est-à-dire que la base est la collection des $\psi_{\varepsilon,j,k}$ $(1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n)$ avec

$$\psi_{\varepsilon,j,k}(x) = 2^{jn/2}\psi_\varepsilon(2^j x - k). \tag{1}$$

On voit que si on prend des $\psi_\varepsilon$ concentrées autour de $x = 0$ et de transformées de Fourier concentrées autour de la raie $|\xi| = 1$, l'ondelette $\psi_{\varepsilon,j,k}$ est concentrée autour du point dyadique $k/2^j$ et autour de la raie de fréquence $|\xi| = 2^j$. Pour le choix des $\psi_\varepsilon$ on dispose des possibilités suivantes :

(i) [L-Me] : les $\psi_\varepsilon$ sont dans la classe de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ et tous leurs moments $\int x^\alpha \psi_\varepsilon(x)dx$ sont nuls;

(ii) [L3] : les $\psi_\varepsilon$ sont des splines polynômiaux à plusieurs variables; on peut les choisir splines de degré $N$ avec $N$ arbitraire et alors leurs moments de degré $\leq N$ sont nuls; de plus ils sont à décroissance exponentielle à l'infini;

(iii) [Da] : les $\psi_\varepsilon$ sont à support compact; on peut les choisir de classe $C^N$ et avec leurs moments de degré $\leq N+1$ nuls;

(iv) [L-Ma-Me] : les trois exemples précédents entrent dans le cadre plus général de l'*analyse multi-échelles* donné par le résultat suivant : si $V_j$ désigne l'espace fermé engendré par les $\psi_{\varepsilon,m,k}$ avec $1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1$, $m \leq j$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors on a :

(a) $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ dense dans $L^2$

(b) $f \in V_j$ si et seulement si $f(2^{-j}x) \in V_0$

(c) il existe $g \in V_0$ telle que les $g(x-k)$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ forment une base inconditionnelle de $V_0$ :l'application $(\lambda_k) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k g(x-k)$ est un isomorphisme de Banach entre $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ et $V_0$.

Inversement si $V_0$ vérifie (c) on peut toujours remplacer $g$ par une fonction $\varphi$ telle que les fonctions $\varphi(x-k)$ forment une base hilbertienne de $V_0$ ; de plus si $W_0$ désigne le supplémentaire orthogonal de $V_0$ dans $V_1$ alors il existe une base de $W_0$ formée de $2^n - 1$ fonctions $\psi_\varepsilon \in W_0$ et de leurs translatées $(\psi_\varepsilon(x-k))_{1\leq\varepsilon\leq 2^n-1,\, k\in\mathbb{Z}}$. Les algorithmes fondamentaux de cette analyse multi-échelles sont décrits dans [Me 2].

Considérons maintenant un groupe de Lie $N$ gradué : on suppose $N$ réel connexe simplement connexe et son algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ se décomposant en sous-espaces $\mathfrak{n}_i$ : $\mathfrak{n} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathfrak{n}_i$ avec $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$ ; on dispose en particulier des dilatations $\delta_t(\sum x_i) = \sum t^i x_i$.

On fait l'hypothèse suivante sur $N$ :

(H) *Il existe une identification de* $\mathfrak{n}_i$ *à* $\mathbb{R}^{d(i)}$ *telle que* $Z = \bigoplus \mathbb{Z}^{d(i)}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{n}$.

On identifie $N$ à $\mathfrak{n}$ par l'application exponentielle. Le problème à considérer est alors le suivant :

(OND) *Existe-t-il des fonctions* $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ *(où $E$ est un ensemble d'indices fini à déterminer) telles que les fonctions*

$$\psi_{\varepsilon,j,k}(x) = 2^{\frac{1}{2}\sum_i id(i)}\psi_\varepsilon\big(k^{-1}.\delta_{2^j}(x)\big), \quad \varepsilon \in E,\ j \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in Z,$$

*forment une base hilbertienne de* $L^2(N)$ *? Si oui, peut-on prendre les fonctions* $\psi_\varepsilon$ *régulières, et localisées en espace et en fréquence ?*

Nous verrons que la réponse est *positive* dans le cas où $N$ est stratifié (c'est-à-dire que $N$ vérifie de plus que $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_i] = \mathfrak{n}_{i+1}$).

Dans le cas où l'hypothèse (H) ne serait pas vérifiée (mais où $N$ est encore stratifié) nous verrons que pour toute identification des $n_i$ à des $\mathbb{R}^{d(i)}$, on a en notant à nouveau $Z = \bigoplus_i \mathbb{Z}^{d(i)}$ l'existence d'une base $\psi_{\varepsilon,j,k}$ indexée par $E \times \mathbb{Z} \times Z$ (où $E$ est fini) composée de fonctions régulières "uniformément" localisées en espace autour de $\delta_{2^{-j}}(k)$ et en fréquence (analyse spectrale du sous-laplacien $\mathcal{J} = \int_{[0,+\infty]} \lambda^2 dE_\lambda$) autour de $\lambda = 2^j$ (*cf.* THÉORÈME 1 ci-dessous).

Le problème principal pour répondre à la question (OND) ci-dessus était de trouver un algorithme permettant de calculer ces fonctions $\psi_\varepsilon$. Ce problème a été précisé par la découverte des analyses multi-échelles sous-jacentes aux résultats abéliens : il fallait déterminer quelle analyse multi-échelles introduire sur le groupe $N$. Ce sera celle des surfaces-splines généralisées à nœuds dans les dilatés de $Z$. La théorie des surfaces splines sera décrite ci-dessous dans la section 3. (Cette théorie $L^2$ des surfaces-splines semble déjà nouvelle dans le cas abélien mais nous l'énonçons ici dans le langage des groupes de Lie statifiés. Voir [L4] pour la présentation dans $\mathbb{R}^n$).

Dans la section 2 nous énonçons nos résultats sur les bases hilbertiennes des groupes stratifiés (THÉORÈMES 1 et 2) ; dans la section 3 nous construisons les splines généralisés sur les groupes de Lie stratifiés (THÉORÈMES 3 et 4) ; dans la section 4 nous démontrons les THÉORÈMES 1 et 2 à l'aide d'un lemme de calcul matriciel que nous démontrons dans la section 5 (THÉORÈME 5) et qui généralise essentiellement les résultats de S. DEMKO

[De] sur l'inversion des matrices $m$-bandées. Enfin dans la section 6 nous établissons quelques majorations supplémentaires pour obtenir des résultats plus précis dans les théorèmes précédents.

## 2. Énoncé des résultats

Nous nous plaçons sur un groupe de Lie $N$ réel nilpotent connexe et simplement connexe. Nous supposons que $N$ est stratifié, c'est-à-dire que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de $N$ admet une décomposition en sous-espaces $\mathfrak{n} = \bigoplus_{1 \le i \le r} \mathfrak{n}_i$ avec $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_i] = \mathfrak{n}_{i+1}$. Nous identifions $\mathfrak{n}_i$ à $\mathbb{R}^{d(i)}$ et notons $Z = \bigoplus_{1 \le i \le r} \mathbb{Z}^{d(i)}$.

Nous identifions $N$ à $\mathfrak{n}$ par l'application exponentielle. Nous disposons alors sur $N$ des objets attachés à l'espace vectoriel $\mathfrak{n}$ (espaces de fonctions-tests : espace $D$ des fonctions $C^\infty$ à support compact, espace de Schwartz,..., mesure de Lebesgue $dx$, qui est aussi la mesure de Haar de $N$; fonctions polynômes; *etc.*). Nous disposons également des opérations suivantes sur $N$ attachées à sa structure de groupe : multiplication entre deux éléments de $N$ $x$ et $y$ notée $xy$, dilatation homogène par un facteur $t > 0$ notée $\delta_t$ et donnée par $\delta_t(\sum_{1 \le i \le r} x_i) = \sum_i t^i x_i$. Nous avons également la norme homogène $|x|$ donnée par :

$$\left|\sum_{i=1}^{r} x_i\right| = \left(\sum_{i=1}^{r} \|x_i\|_{\mathbb{R}^{d(i)}}^{(2\,r!/i)}\right)^{1/(2\,r!)}$$

qui vérifie $|\delta_t x| = t|x|$. De plus nous notons $Q$ la dimension homogène de $N$ donnée par $Q = \sum_i id(i)$ ou encore $d(\delta_t x) = t^Q dx$.

Nous identifions également les éléments de $\mathfrak{n}$ à des opérateurs différentiels invariants à gauche sur $N$; en particulier nous notons $(X_k)_{1 \le k \le d(1)}$ une base de $\mathfrak{n}_1$ et $\mathcal{J}$ le sous-laplacien correspondant donné par la formule $J = -\sum_k X_k^2$. L'opérateur $J$ est auto-adjoint positif et hypo-elliptique. Enfin nous notons $H^s$ l'espace $H^s = (Id + J)^{-s/2} L^2$; en particulier, pour $s \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} H^s = \Big\{ f \in L^2 \mid & \text{ pour } 0 \le \alpha \le s \\ & \text{et } \big(p(1), \ldots, p(\alpha)\big) \in \big\{1, \ldots, d(1)\big\}^\alpha \quad X_{p(1)} \ldots X_{p(\alpha)} \quad f \in L^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Les propriétés de $J$ et de $H^s$ sont décrites dans [Fo].

Nous nous proposons de montrer les résultats suivants sur $N$ stratifié : nous notons $DZ$ les nombres "dyadiques" sur $N$ : $DZ = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{2^j} Z$.