

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FUNCTIONAL CALCULUS FOR FIRST  
ORDER SYSTEMS OF DIRAC TYPE  
AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Numéro 144

Nouvelle série

2 0 1 6

Pascal AUSCHER

Sebastian STAHLHUT

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

---

### **Comité de rédaction**

Valérie BERTHÉ  
Gérard BESSON  
Emmanuel BREUILLARD  
Yann BUGEAUD  
Jean-François DAT  
Charles FAVRE

Raphaël KRIKORIAN  
O' Grady KIERAN  
Julien MARCHÉ  
Emmanuel RUSS  
Christophe SABOT  
Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

### **Diffusion**

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### **Tarifs**

*Vente au numéro* : 40 € (\$ 60)

*Abonnement* Europe : 138 € hors Europe : 154 € (\$ 231)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### **Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-829-9

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---

**FUNCTIONAL CALCULUS FOR FIRST  
ORDER SYSTEMS OF DIRAC TYPE  
AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

**Pascal Auscher  
Sebastian Stahlhut**

*P. Auscher*

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France.

*E-mail* : `pascal.auscher@math.u-psud.fr`

*Sebastian Stahlhut*

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France.

*E-mail* : `sebastian.stahlhut@math.u-psud.fr`

---

**2000 Mathematics Subject Classification.** — 35J25, 35J57, 35J46, 35J47, 42B25, 42B30, 42B35, 47D06.

**Key words and phrases.** — First order elliptic systems; Hardy spaces associated to operators; tent spaces; non-tangential maximal functions; second order elliptic systems; boundary layer operators; *a priori* estimates; Dirichlet and Neumann problems; extrapolation.

---

# FUNCTIONAL CALCULUS FOR FIRST ORDER SYSTEMS OF DIRAC TYPE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Pascal Auscher, Sebastian Stahlhut

**Abstract.** — This memoir contains two articles.

1) In *A priori estimates for boundary value elliptic problems via first order systems*, we prove a number of *a priori* estimates for weak solutions of elliptic equations or systems with vertically independent coefficients in the upper-half space. These estimates are designed towards applications to boundary value problems of Dirichlet and Neumann type in various topologies. We work in classes of solutions which include the energy solutions. For those solutions, we use a description using the first order systems satisfied by their conormal gradients and the theory of Hardy spaces associated with such systems but the method also allows us to design solutions which are not necessarily energy solutions. We obtain precise comparisons between square functions, non-tangential maximal functions and norms of boundary trace. The main thesis is that the range of exponents for such results is related to when those Hardy spaces (which could be abstract spaces) are identified to concrete spaces of tempered distributions. We consider some adapted non-tangential sharp functions and prove comparisons with square functions. We obtain boundedness results for layer potentials, boundary behavior, in particular strong limits, which is new, and jump relations. One application is an extrapolation for solvability “à la Šneĭberg”. Another one is stability of solvability in perturbing the coefficients in  $L^\infty$  without further assumptions. We stress that our results do not require De Giorgi-Nash assumptions, and we improve the available ones when we do so.

2) In  *$L^p$ - $L^q$  theory for holomorphic functions of perturbed first order Dirac operators*, the aim is to prove  $L^p$ - $L^q$  off-diagonal estimates and  $L^p$ - $L^q$  boundedness for operators in the functional calculus of certain perturbed first order differential operators of Dirac type for with  $p \leq q$  in a certain range of exponents. We describe the  $L^p$ - $L^q$  off-diagonal estimates and the  $L^p$ - $L^q$  boundedness in terms of the decay properties of the related holomorphic functions and give a necessary condition for  $L^p$ - $L^q$  boundedness. Applications to Hardy-Littlewood-Sobolev estimates for fractional operators will be given.

**Résumé (Calcul fonctionnel des systèmes du premier ordre de type Dirac et problèmes aux limites)**

Ce mémoire comporte deux articles.

1) Dans *Estimations a priori pour les problèmes aux limites elliptiques via des systèmes du premier ordre*, on démontre un certain nombre d'estimations *a priori* pour les solutions faibles d'équations ou systèmes elliptiques sur le demi-espace dont les coefficients sont indépendents de la variable verticale. Ces estimations s'appliquent aux problèmes de Dirichlet ou de von Neumann dans des topologies variées. Nous considérons des classes de solutions comprenant les solutions d'énergie. Pour ces solutions, on utilise une approche par réduction à un système du premier ordre vérifié par le gradient conormal et une théorie des espaces de Hardy associés à ces systèmes. La méthode permet aussi de construire d'autres types de solutions. On obtient des comparaisons précises entre les normes de certaines fonctions d'aire, de certaines fonctions non-tangentes maximales et de la trace des solutions du système. La thèse du mémoire est que l'ensemble des exposants pour lesquels on obtient ces comparaisons est relié à celui pour lesquels les espaces de Hardy associés (qui pourraient n'être que des espaces abstraits) sont identifiés à des espaces concrets dans les distributions tempérées. On compare aussi les normes des fonctions maximales dièses non-tangentes à celle des fonctions d'aire. On obtient en particulier des résultats de continuité pour les opérateurs de simple et double couche généralisés, leur comportement au bord dans des topologies fortes, ce qui est nouveau, et les relations de saut. Une des applications est un résultat d'extrapolation locale « à la Šneřberg » pour la résolubilité de nos équations elliptiques. Une autre est la stabilité de la résolubilité par perturbations dans  $L^\infty$  des coefficients. On observe que nos résultats n'utilisent pas la régularité locale des solutions (i.e., les conditions de DeGiorgi-Nash) et, lorsque nous la supposons, nous améliorons les résultats existants.

2) Dans *Théorie  $L^p$ - $L^q$  pour le calcul holomorphe d'opérateurs de Dirac perturbés*, notre objectif est de démontrer des estimations de continuité hors diagonale  $L^p$ - $L^q$  pour des opérateurs dans le calcul fonctionnel de certains opérateurs différentiels de type Dirac avec  $p \leq q$  dans un certain intervalle d'exposants. Nous donnons des conditions suffisantes et des conditions nécessaires pour obtenir de telles estimations. Une application à des inégalités de type Hardy-Littlewood-Sobolev pour les puissances fractionnaires est donnée.

# CONTENTS

## PART ONE

<i>A priori</i> estimates for boundary value elliptic problems via first order systems .....	1
<b>1. Introduction</b> .....	3
<b>2. Setup</b> .....	11
2.1. Boundary function spaces .....	11
2.2. Bisectorial operators .....	11
2.3. The first order operator $D$ .....	12
2.4. The operators $DB$ and $BD$ .....	14
<b>3. Holomorphic functional calculus</b> .....	17
3.1. $L^2$ results .....	17
3.2. $L^p$ results .....	18
3.3. The one dimensional case .....	20
3.4. Constant coefficients .....	21
3.5. $L^p$ - $L^q$ estimates .....	21
<b>4. Hardy spaces</b> .....	23
4.1. Tent spaces: notation and some review .....	23
4.2. General theory .....	24
4.3. Spaces associated to $D$ .....	30
4.4. General facts about comparison of $\mathbb{H}_{DB}^p$ and $\mathbb{H}_D^p$ .....	32
4.5. The spectral subspaces .....	35
<b>5. Pre-Hardy spaces identification</b> .....	37
5.1. Proof of theorem 5.1 .....	40
5.2. Proof of theorem 5.3 .....	47
5.3. Proof of theorem 5.7 .....	50
5.4. Proof of theorem 5.8 .....	51

<b>6. Completions</b> .....	55
<b>7. Openness</b> .....	59
<b>8. Regularization via semigroups</b> .....	63
<b>9. Non-tangential maximal estimates</b> .....	67
9.1. $L^2$ estimates and Fatou type results .....	68
9.2. Lower bounds for $p \neq 2$ .....	71
9.3. Some upper bounds for $p \neq 2$ .....	75
9.4. End of proof of theorem 9.4 .....	76
9.5. End of proof of theorem 9.5 .....	76
<b>10. Non-tangential sharp functions for <math>BD</math></b> .....	79
<b>11. Sobolev spaces for <math>DB</math> and <math>BD</math></b> .....	85
11.1. Definitions and properties .....	85
11.2. A priori estimates .....	89
<b>12. Applications to elliptic PDE's</b> .....	95
12.1. A priori results for conormal gradients of solutions in $\mathcal{E}$ .....	95
12.2. A priori comparisons of various norms .....	99
12.3. Boundary layer potentials .....	100
12.4. The block case .....	105
<b>13. Systems with de Giorgi type conditions</b> .....	109
13.1. Preliminary computations .....	111
13.2. Proof of theorem 13.2 .....	112
13.3. Proof of lemma 13.6 .....	116
13.4. Openness .....	116
<b>14. Application to perturbation of solvability for the boundary value problems</b> .....	119
14.1. Proof of theorem 1.3 .....	119
14.2. Stability in the coefficients .....	126



## PART TWO

<b><math>L^p</math>-<math>L^q</math> theory for holomorphic functions of perturbed first order Dirac operators</b> .....	129
<b>Introduction</b> .....	131
<b>15. Setting</b> .....	135
15.1. Definitions and notation .....	135
15.2. First order Dirac operators .....	137
<b>16. The <math>L^p</math>-<math>L^q</math> Theory</b> .....	141
16.1 $L^p$ - $L^q$ estimates in terms of decay properties of holomorphic functions .	141
16.2. Stability under multiplication by cut-off functions and the relation to Ajiev's work .....	148
16.3 $L^p$ - $L^q$ estimates and the relation to the kernel/range decomposition ...	150
16.4. Analytic extensions .....	153
16.5. An Application .....	153
Acknowledgments .....	155
<b>Bibliography</b> .....	157

