Séminaires & Congrès

COLLECTION SMF

UN THÉORÈME DE KERCKHOFF, MASUR ET SMILLIE: UNIQUE ERGODICITÉ SUR LES SURFACES PLATES

Sébastien Gouëzel & Erwan Lanneau

ÉCOLE DE THÉORIE ERGODIQUE

Numéro 20 Y. Lacroix, P. Liardet, J.-P. Thouvenot, éds.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Séminaires & Congrès
20, 2010, p. 113–145

UN THÉORÈME DE KERCKHOFF, MASUR ET SMILLIE: UNIQUE ERGODICITÉ SUR LES SURFACES PLATES

par

Sébastien Gouëzel & Erwan Lanneau

Résumé. — Dans ces notes nous présentons et démontrons un théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie sur l'unique ergodicité du flot directionnel sur une surface de translation dans presque toutes les directions.

La preuve suit essentiellement celle présentée dans un survol de Masur et Tabachnikov. Nous donnons une preuve complète et élémentaire du théorème.

Abstract **(A theorem of Kerckhoff, Masur and Smillie: unique ergodicity of flat surface)**

In these notes we present and demonstrate a theorem of Kerckhoff, Masur and Smillie on the unique ergodicity of the directional flow on a surface translation in almost every direction. The proof follows the one presented in a survey of Masur and Tabachnikov. We give a complete and elementary proof of the theorem.

1. Introduction

Le but de ce texte est de démontrer un théorème de Steven Kerckhoff, Howard Masur et John Smillie concernant un résultat de théorie ergodique sur les surfaces de translation ([10]).

1.1. — Le prototype d'une surface de translation est donné par le tore plat standard $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de sa métrique plate (ou euclidienne) dz. On peut construire géométriquement $\mathbb{T}^2$ de la manière suivante. Un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par translation est donné par le carré unité $]0,1[^2$. Le tore s'obtient alors en identifiant les bords opposés de ce carré à l'aide de translations (voir figure 1a).

Classification mathématique par sujets **(2000).** — Primaire: 32G15; secondaire: 30F30, 57R30, 37D40.
Mots clefs. — Surface plate, feuilletage linéaire, métrique euclidienne.

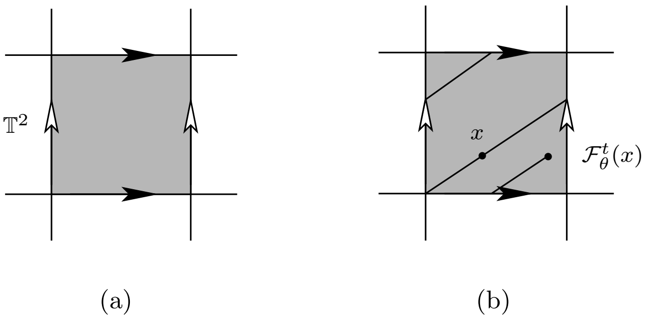

FIGURE 1. Le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de son flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$

1.2. — On peut définir sur $\mathbb{T}^2$ un flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$, pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. C'est le flot linéaire de pente constante égale à θ : si $x \in \mathbb{T}^2$ et $t > 0$ alors $\mathcal{F}^t_\theta(x)$ est l'unique point de $\mathbb{T}^2$ à distance t de x et situé sur la géodésique (orientée positivement) de pente θ passant par x (voir figure 1b). On définit de manière équivalente $\mathcal{F}^t_\theta(x)$ pour $t < 0$.

Par construction il est clair que le flot $\mathcal{F}_\theta$ laisse invariant la mesure de Lebesgue notée Leb. On peut donc considérer le système dynamique $(\mathbb{T}^2, \mathrm{Leb}, \mathcal{F}_\theta)$; il vérifie le théorème classique suivant, dû à Hermann Weyl :

Théorème. — *Pour Lebesgue presque tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, le système dynamique $(\mathbb{T}^2, \mathrm{Leb}, \mathcal{F}_\theta)$ est uniquement ergodique.*

Rappelons que cela signifie que $\mathcal{F}_\theta$ admet une seule mesure de probabilité invariante. De manière équivalente, toutes les orbites du flot sont denses dans le tore et uniformément distribuées par rapport à la mesure de Lebesgue. On dira aussi souvent dans la suite que le flot directionnel est uniquement ergodique dans presque toutes les directions. En fait, le théorème de Weyl est même plus précis que cela, puisqu'il donne l'unique ergodicité dans toutes les directions *irrationnelles* ; les directions exceptionnelles forment donc un ensemble dénombrable.

1.3. — Une surface de translation est un triplet $(\mathcal{S}, \Sigma, \omega)$ où $\mathcal{S}$ est une surface compacte, connexe, sans bord, orientée, $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini de points $P_i \in \mathcal{S}$ et $\omega = \{(U_i, z_i)\}_i$ est un atlas de translation sur $\mathcal{S} \setminus \Sigma$. Par atlas de translation, nous demandons que les changements de cartes soient du type $z_i = z_j + \mathrm{cst}$. On demandera de plus que, au voisinage de chaque singularité P_i, Σ soit isomorphe à un revêtement de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ avec un nombre fini $k_i + 1$ de feuillets. Par abus de langage nous dénoterons souvent $(\mathcal{S}, \Sigma, \omega)$ simplement par $(\mathcal{S}, \omega)$ ou juste $\mathcal{S}$ lorsque le contexte sera clair. La structure euclidienne sur $\mathcal{S}$ induit naturellement une mesure que l'on appellera encore mesure de Lebesgue Leb.

1.4. — Comme précédemment, nous pouvons définir un flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$ sur $\mathcal{S}$ laissant invariant la métrique euclidienne définie sur $\mathcal{S}$, *via* les cartes. Ce flot n'est en fait pas correctement défini sur Σ, ni même sur les trajectoires qui arrivent ou partent de Σ (il y en a un nombre fini). Ainsi, $\mathcal{F}_\theta$ est défini sur un sous-ensemble dense et de mesure pleine de $\mathcal{S}$ mais, par abus de langage, nous parlerons néanmoins du flot $\mathcal{F}_\theta$ sur $\mathcal{S}$. Comme le flot directionnel dans $\mathbb{R}^2$ préserve la mesure de Lebesgue, $\mathcal{F}_\theta$ préserve la mesure Leb sur $\mathcal{S}$.

On peut alors énoncer le théorème que nous allons démontrer dans ce texte et qui généralise le théorème de Weyl énoncé ci-dessus.

***Théorème* (S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie, 1986).** — *Pour toute surface de translation $\mathcal{S}$ et pour Lebesgue presque tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, le flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$ sur $\mathcal{S}$ est uniquement ergodique.*

***1.5. Remarque*.** — Le théorème ci-dessus reste vrai dans un cadre plus général. Nous pouvons étendre la définition de surfaces de translation aux surfaces de demi-translation en imposant que les changements de cartes soient de la forme $z_i = \pm z_j + \text{cst}$. L'objet naturel venant avec un atlas de translation est une forme différentielle abélienne. L'analogue pour les surfaces de demi-translation sont les formes différentielles quadratiques (voir [8] pour un exposé plus détaillé).

La preuve du théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie dans ce cadre étendu est simplement plus technique et ne nécessite pas d'idée nouvelle fondamentale. Par conséquent, nous nous restreindrons aux surfaces de translation.

***1.6. Remarque*.** — Remarquons aussi que, contrairement au tore, il y a des exemples de surfaces de translation où il y a un nombre non dénombrable de directions minimales et non uniquement ergodiques ([**9**, **16**]). Une des différences essentielles avec le tore est que le flot linéaire sur un tore est une isométrie globale, *i.e.* la métrique plate ne possède pas de singularités.

***1.7. Remarque*.** — Enfin on peut noter que le théorème KMS est un renforcement d'un théorème de H. Masur et W. Veech ([**11**, **17**]). Une section de Poincaré du flot directionnel sur un intervalle dans $\mathcal{S}$ produit un *échange d'intervalles*. Masur et Veech ont démontré que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique.

1.8. — Dans cette note, nous allons suivre une démarche un peu atypique : après avoir donné quelques exemples et propriétés basiques des surfaces de translation, et démontré une version faible du théorème KMS, nous exposerons une preuve complète et élémentaire du théorème KMS.

Ce n'est qu'ensuite que nous introduirons des outils conceptuels supplémentaires qui apporteront un autre éclairage sur la preuve. Nous espérons que la démonstration du théorème pourra être vue comme une justification *a priori* de l'introduction de ces outils.

2. Quelques définitions et exemples

2.1. Surfaces de translation. — Avant d'aller plus loin, donnons quelques propriétés utiles des surfaces de translation. Comme nous l'avons vu précédemment, $\mathcal{S}\setminus\Sigma$ possède un atlas de translation. Ceci permet de définir une métrique euclidienne *via* la forme différentielle globale $\omega = \mathrm{d}z_i$ sur U_i. Ainsi $\mathcal{S}\setminus\Sigma$ est localement isométrique à un plan $\mathbb{R}^2$, la courbure de la métrique étant nulle en tout point. La formule de Gauß-Bonnet implique alors que la courbure de la métrique sur $\mathcal{S}$ est concentrée dans les points P_i.

Par définition, il existe pour tout i une identification entre un voisinage épointé de P_i dans $\mathcal{S}$ et un revêtement de degré k_i+1 de $\mathbb{R}^2-\{0\}$. La surface $\mathcal{S}$ est ainsi isométrique à un cône d'angle $2(k_i+1)\pi$. Nous parlerons ainsi pour P_i de singularité conique d'angle $2(k_i+1)\pi$. Notons ici qu'au voisinage d'un point régulier, la surface est bien isométrique à un « cône plat » d'angle $2(k+1)\pi = 2\pi$ avec $k=0$. La courbure de Gauß est donnée par $\kappa = -k_i\pi$ et la formule de Gauß-Bonnet s'écrit ici :

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 2g-2 \quad \text{où } g = \mathrm{genre}(\mathcal{S}). \tag{2.1}$$

Le théorème de Riemann-Roch implique que pour toute partition entière $(k_1,\dots,k_n)$ de $2g-2$, il existe une surface de translation avec exactement n singularités coniques d'angles $2(k_i+1)\pi$ pour $i=1,\dots,n$; mais nous n'utiliserons pas ce fait ici.

On peut définir un feuilletage vertical (respectivement horizontal) sur $\mathcal{S}\setminus\Sigma$ par les lignes de niveaux des cartes locales : $z_i^{-1}(x=\mathrm{cst})$ (respectivement $z_i^{-1}(y=\mathrm{cst})$). Cela permet alors, dans ces coordonnées, d'introduire le flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$ pour $\theta\in\mathbb{S}^1$. La métrique euclidienne est invariante sous l'action de ce flot. Les orbites du flot directionnel ne sont bien sûr pas toutes bien définies : certaines feuilles rencontrent des singularités en temps fini. Néanmoins $\mathcal{S}$ ne possède qu'un nombre fini de singularités et par chaque singularité ne passe qu'un nombre fini de feuilles dans la direction θ. Ceci implique alors que pour tout θ, le flot $\mathcal{F}_\theta$ est presque partout bien défini sur $\mathcal{S}$.

La structure euclidienne sur $\mathcal{S}$ est très facile à visualiser localement ; dans les coordonnées fournies par le feuilletage horizontal et le feuilletage vertical, une géodésique