Séminaires & Congrès

COLLECTION SMF

RECHERCHE DE MESURES INVARIANTES POUR L'ACTION CONJOINTE D'UN AUTOMATE CELLULAIRE ET DU DÉCALAGE

Mathieu Sablik

ÉCOLE DE THÉORIE ERGODIQUE

Numéro 20

Y. Lacroix, P. Liardet, J.-P. Thouvenot, éds.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Séminaires & Congrès
20, 2010, p. 207–251

RECHERCHE DE MESURES INVARIANTES POUR L'ACTION CONJOINTE D'UN AUTOMATE CELLULAIRE ET DU DÉCALAGE

par

Mathieu Sablik

Résumé. — Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini; un automate cellulaire peut être défini comme une fonction continue $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui commute avec le décalage σ. On se propose de caractériser les mesures de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, invariantes pour la $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action définie par le couple (F, σ).

On s'intéresse tout d'abord aux conditions imposées par la dynamique directionnelle introduite dans [25] sur les mesures (F, σ)-invariantes. Pour la classe des automates cellulaires qui ont un cône d'expansivité, on s'aperçoit qu'intervient une certaine rigidité des mesures (F, σ)-invariantes. Cela signifie qu'il y a des contraintes sur ces mesures, notamment un lien entre l'entropie métrique de F et l'entropie métrique de σ. On étudie en particulier la classe des automates cellulaires algébriques. L'étude de cette classe rappelle la conjecture de Furstenberg [7] qui énonce en particulier que les seules mesures invariantes suivant la multiplication par 2 et par 3 sur le tore sont la mesure de Lebesgue et les mesures uniformément portées par les orbites (F, σ)-périodiques.

***Abstract* (Characterizing invariant measures for the simultaneous action of a cellular automaton and the shift)**

Let $\mathcal{A}$ be a finite alphabet; a cellular automata can be defined as a continuous function $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ which commutes with the shift σ on $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. We consider the $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action induced by (F, σ) and are interested in search of (F, σ)-invariant probability measures.

First, we are interested in the properties of (F, σ)-invariant measures induced by the directional dynamic introduced in [25]. For the class of cellular automata with an expansive cone, there is a phenomenon of rigidity for (F, σ)-invariant measures. This means that, in this case, there are constraints on (F, σ)-invariant measures, in particular a link between the metric entropy of F and the metric entropy of σ. More precisely, we study the class of algebraic cellular automata. This study recall the Furstenberg's conjecture [7] which aims is to characterize all probability measures on the torus, invariant under multiplication by two coprime integers.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 37B15, 28D05, 28D20.
Mots clefs. — Automate cellulaire, mesure invariante, problème de rigidité, dynamiques directionnelles.

Introduction

Un automate cellulaire est un système complexe défini par une règle locale qui agit de manière synchrone et uniforme sur l'espace des configurations. Dans cet article, on choisira pour espace des configurations $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est un alphabet fini. Ces modèles très simples ont une grande variété de comportements dynamiques qui, ces dernières années, ont été l'objet d'études d'un point de vue informatique et mathématique. G. Hedlund [9] est le premier à donner un cadre symbolique aux automates cellulaires en les décrivant comme des transformations continues sur l'espace des configurations $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit, qui commutent avec le décalage, noté σ. Cela permet de considérer l'automate cellulaire comme un système dynamique. Comme tout système dynamique topologique, une question naturelle est d'identifier l'ensemble des mesures invariantes de ce système puis d'étudier ses propriétés par rapport aux mesures invariantes trouvées. Les premières études dans cette direction ont été réalisées par [3] et [31].

Soit $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ un automate cellulaire. Compte-tenu du résultat de [9], on peut considérer la $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$-action (F,σ) sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Dans cet article, on se propose de rechercher les mesures de probabilité (F,σ)-invariantes. Il est facile de montrer l'existence de telles mesures : il suffit de considérer les valeurs d'adhérence de la suite

$$\left(\frac{1}{n^2}\sum_{(k,m)\in[0,n-1]^2}\mu\circ F_T^{-k}\circ\sigma^{-m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

où μ appartient à l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, noté $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$. Il y a existence des valeurs d'adhérence grâce à la compacité de $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ pour la topologie faible*. Cette preuve n'a rien d'explicite. Dans cet article, on s'attache à la recherche effective de telles mesures.

Après avoir introduit diverses définitions, on s'intéresse dans la section 2 aux techniques élémentaires de recherche des mesures (F,σ)-invariantes. Une première classe naturelle de telles mesures est l'ensemble des mesures portées uniformément par des orbites (F,σ)-périodiques. Une autre classe de mesures (F,σ)-invariantes, qui apparaît naturellement, correspond aux mesures maximales pour certains sous-décalages F-invariants. On retrouve alors le résultat classique de G. Hedlund, à savoir que la mesure de Bernoulli uniforme sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est (F,σ)-invariante si, et seulement si, F est surjectif. Pour conclure cette section, on rappelle la définition de l'attracteur μ-limite introduit par P. Kurka et A. Maass [13]. Pour une mesure (F,σ)-invariante μ, l'ensemble μ-limite correspond au support de cette mesure. Ainsi, comme on le verra sur un exemple, la caractérisation générale des ensembles μ-limites pour toute mesure σ-invariante donne des informations sur l'ensemble des mesures (F,σ)-invariantes.

En section 3, on reprend la classification établie dans [25] à partir de la dynamique topologique de l'automate cellulaire en tant que $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action. Chaque classe impose des contraintes fortes aux mesures (F, σ)-invariantes que nous essayons de dégager. Pour certaines classes, on sait facilement déterminer l'ensemble des mesures (F, σ)-invariantes. Pour d'autres, on obtient des contraintes, notamment des formules qui lient l'entropie directionnelle suivant deux directions (section 4). Cette rigidité des mesures (F, σ)-invariantes est spécialement marquée pour les automates cellulaires qui ont une direction d'expansivité. Il n'y a pas de résultat général pour cette classe. Par contre, si on se restreint à la classe des automates cellulaires algébriques bipermutatifs, on obtient des résultats de rigidité discutés en section 5.

En effet, lorsqu'on considère les automates cellulaires algébriques bipermutatifs, des conditions d'ergodicité sur la mesure, des conditions sur la taille des noyaux des itérés de l'automate cellulaire et la positivité de l'entropie suivant une direction, forcent une mesure (F, σ)-invariante à être la mesure de Bernoulli uniforme. Le premier résultat dans cette direction est apparu dans [10], puis des généralisations dans [19] et [24]. Ce problème est apparenté à la conjecture de Furstenberg [7] qui caractérise les mesures de probabilité sur le tore, invariantes par la multiplication par deux entiers premiers entre eux. D. J. Rudolph montre dans [22] que si une telle mesure est d'entropie positive alors elle est nécessairement la mesure de Lebesgue. Il reste à caractériser les mesures d'entropie nulle. Ce problème est encore ouvert et la conjecture est que ce sont les mesures uniformes portées par les orbites périodiques sous l'action des deux transformations. Il existe une approche plus algébrique de ce problème. Notamment K. Schmidt [26] et plus récemment M. Einsiedler [5] se sont intéressés à l'étude des mesures invariantes par une $\mathbb{Z}^d$-action sur un groupe zéro-dimensionnel, comme dans l'exemple de Ledrappier [14].

La section 5.3 utilise les théorèmes précédents pour caractériser l'ensemble des mesures (F, σ)-invariantes lorsque $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que l'automate cellulaire F agit sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ comme un morphisme sur le groupe produit.

1. Définitions

1.1. Action du décalage sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

1.1.1. *Espace des configurations.* — Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini appelé alphabet. L'espace des configurations est l'ensemble des fonctions définies sur le réseau $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$; on le note $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Si $\mathcal{A}$ est muni de la topologie discrète, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit est un espace compact, métrisable (car $\mathbb{Z}$ est dénombrable), parfait (*i.e.*

l'espace n'a pas de point isolé) et totalement discontinu. On munit cet espace de la distance de Cantor définie pour $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$d_C(x,y) = 2^{-\min\{|m| : x_m \neq y_m\}}.$$

Considérons un sous-ensemble $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$. Soit $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et notons $x_{\mathbb{U}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}$ la restriction de x à $\mathbb{U}$. Pour un motif $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{U}}$, on définit le cylindre centré sur w par $[w]_{\mathbb{U}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{\mathbb{U}} = w\}$. Une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$, $w = w_0...w_{n-1} \in \mathcal{A}^n$, est un mot fini de longueur n. On note $|w|$ la longueur n du mot. $\mathcal{A}^*$ désigne l'ensemble des mots finis et $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des mots finis privé du mot vide.

Remarque. — Parfois, l'espace des configurations peut être défini à partir d'un réseau quelconque $\mathbb{M} = \mathbb{N}^{d'} \times \mathbb{Z}^{d''}$ ou même un groupe moyennable.

1.1.2. *Décalages et sous-décalages.* — L'action de $\mathbb{Z}$ sur lui-même induit une $\mathbb{Z}$-action sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par *décalage* (appelée aussi action par le *shift*) définie par $\sigma : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$.

Un sous-décalage (ou sous-shift) est défini comme un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ invariant par σ. Soit Σ un sous-décalage et $\mathbb{U}$ une partie finie de $\mathbb{Z}$; notons $\mathcal{L}_\Sigma(\mathbb{U}) = \{x_{\mathbb{U}} : x \in \Sigma\}$ l'ensemble des motifs de Σ de base $\mathbb{U}$ et $\mathcal{L}_\Sigma$, l'ensemble des motifs. Un sous-décalage Σ est dit avoir la propriété de spécification si : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u, v \in \mathcal{L}_\Sigma$ de base respective $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ et pour tout $n \geq N$, il existe $x \in \Sigma$, σ-périodique, tel que $x_{\mathbb{U}} = u$ et $x_{n+|u|+\mathbb{V}} = v$. Un sous-décalage Σ est dit avoir la propriété de spécification faible s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u, v \in \mathcal{L}_\Sigma$ de base respective $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$, il existe $n \leq N$ et $x \in \Sigma$, σ-périodique, tels que $x_{\mathbb{U}} = u$ et $x_{n+|u|+\mathbb{V}} = v$ (voir [4] pour plus de détails).

Remarque. — Un sous-décalage sofique transitif (resp. mélangeant) a la propriété de spécification faible (resp. la propriété de spécification).

1.2. Automate cellulaire comme une $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action

1.2.1. *Automates cellulaires.* — De manière générale, un automate cellulaire (un AC, en abrégé) est un couple $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$ où $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est l'espace des configurations muni du décalage σ et $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est définie, à partir d'un ensemble fini $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ appelé voisinage et une fonction locale $\overline{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \to \mathcal{A}$, par

$$F(x)_m = \overline{F}((x_{m+u})_{u\in\mathbb{U}}) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \text{ et tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Si le plus petit voisinage permettant de définir F est réduit à un singleton, on dit que F est trivial. Par la caractérisation symbolique de Hedlund [9], un AC est défini de manière équivalente comme une fonction continue $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui commute avec σ. Cela permet de considérer la $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$-action (F, σ).