Séminaires & Congrès

COLLECTION SMF

OUTILS POUR LA CLASSIFICATION LOCALE DES ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES LINÉAIRES COMPLEXES

Lucia Di Vizio & Jacques Sauloy

ARITHMETIC AND GALOIS THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Numéro 23

Lucia Di Vizio, Tanguy Rivoal, eds.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Séminaires & Congrès
23, 2011, p. 229–282

OUTILS POUR LA CLASSIFICATION LOCALE DES ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES LINÉAIRES COMPLEXES

par

Lucia Di Vizio & Jacques Sauloy

Résumé. — On expose ici les outils élémentaires de la classification locale (formelle et analytique) des équations aux q-différences linéaires complexes. Les résultats sont donnés dans trois types de situation: modules sur un corps aux différences (K, σ); modules aux q-différences formels (*i.e.* sur $\mathbf{C}((z))$); modules aux q-différences analytiques (*i.e.* sur $\mathbf{C}(\{z\})$). Dans ce dernier cas nous distinguerons le cas $|q| \neq 1$ (mais nous travaillerons plutôt sous l'hypothèses $|q| > 1$) et $|q| = 1$. Le théorème 5.9 permet d'améliorer [**10**, Theorem 3.14], en éliminant certaines hypothèses diophantiennes (voir corollaire 5.13).

***Abstract* (Tools for local classification of linear complex q-difference equations)**
We describe here the basic tools for local classification (formal and analytic) of complex linear q-difference equations. Results are given in three settings: modules over a difference field (K, σ); formal q-difference modules (*i.e.* over $\mathbf{C}((z))$); analytic q-difference modules (*i.e.* over $\mathbf{C}(\{z\})$). In the latter case, we distinguish the cases that $|q| \neq 1$ (but we shall rather work under the assumption that $|q| > 1$) and $|q| = 1$. Theorem 5.9 then reinforces [**10**, Theorem 3.14] by giving up some diophantine assumptions (see corollary 5.13).

1. En guise de motivation : quelques exemples historiques élémentaires

Ce chapitre a un rôle introductif, presque culturel : il sert essentiellement à motiver le cours. En filigrane, la comparaison avec la théorie « classique » des équations différentielles linéaires analytiques sur $\mathbf{C}$ devrait servir de fil d'Ariane et le problème des petits diviseurs, qui surgit pour $|q| = 1$, devrait être un aperçu de notre but final.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 39A13, 12H10.
Mots clefs. — Équations aux q-différences; classification analytique; classification formelle; polygone de Newton; filtration par les pentes; petits diviseurs.

Work partially supported by ANR, contract ANR-06-JCJC-0028.

On peut utilement compléter cette introduction par la lecture de l'article de survol[(1)] [11].

Nous ferons appel aux notations standard du « q-calcul ». En particulier, nous utiliserons les *symboles de Pochhammer* :

$$(a;q)_n := \prod_{0\leq i<n} (1-aq^i),$$
$$(a;q)_\infty := \prod_{i\geq 0}(1-aq^i).$$

La première formule est définie pour $n \in \mathbf{N}$ et $a,q \in \mathbf{C}$, mais nous supposerons *toujours* que $q \in \mathbf{C}^*$. En fait, nous supposerons presque toujours que q n'est pas non plus racine de l'unité ; et nous distinguerons fréquemment le cas $|q| = 1$ du cas $|q| \neq 1$. On a la relation de récurrence :

$$(a;q)_n = (1-a)(aq;q)_{n-1}.$$

Cette relation permet d'étendre la définition de $(a;q)_n$ à tout $n \in \mathbf{Z}$ (avec, bien entendu, des conditions supplémentaires sur a et q). On vérifie alors dans tous les cas l'égalité :

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}.$$

Le produit infini $(a;q)_\infty$ ne converge dans $\mathbf{C}$ que si $a = 0$ ou $|q| < 1$. (Cependant, considéré comme *série formelle* en q, il est défini inconditionnellement.)

Exercice 1.1. — *Donner une expression explicite de $(a;q)_n$ lorsque $n < 0$.*

Exercice 1.2. — *Déterminer récursivement les coefficients de la série formelle $(a;q)_\infty \in \mathbf{C}[[q]]$.*
Indication *: en dérivant logarithmiquement, on se ramène à une « série de Lambert » $\sum \frac{aq^n}{1-aq^n}$ dont le développement en série formelle s'exprime sans peine.*

1.1. Exemples réguliers et fuchsiens. —

1.1.1. *Le q-calcul d'Euler et le « paramètre supplémentaire ».* — Soit $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier $n \in \mathbf{N}$ (voir par exemple [16, chap XIX]). En 1748, Euler[(2)] a déterminé la série génératrice de ces nombres :

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^n)\cdots}.$$

(1) Voir aussi le chapitre "Combinatoire avancée" (*sic*) du livre de L3 dirigé par Jean-Pierre Ramis et André Warusfel, paru chez De Boeck en août 2010. (Ce chapitre a été commis par le deuxième auteur.)

(2) À notre connaissance, l'usage de la lettre q dans ce genre de calcul remonte à Jacobi. Le lien avec la lettre q des déformations quantiques est donc dû à un heureux hasard ! Ce qui est certain, c'est que le lien établi par Jacobi entre la fonction $\sum p(n)q^n$ et la théorie des fonctions elliptiques a eu une influence favorable sur l'avenir du q-calcul.

Cette série entière en q a pour rayon de convergence 1 et admet le cercle unité pour frontière naturelle. Euler a démontré de nombreuses formules extraordinaires, dont celle-ci :

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{(q;q)_n} = \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)}.$$

Pour cette dernière, il a inventé la *ruse fondamentale*, l'introduction d'un paramètre supplémentaire ; on pose :

$$f(z) := \frac{1}{(z;q)_\infty} = \frac{1}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^n z)\cdots}.$$

Pour q fixé tel que $|q| < 1$, c'est une fonction analytique de z pour $|z| < 1$, telle que $f(0) = 1$ et vérifiant l'*équation aux q-différences* :

$$f(qz) = (1-z)f(z).$$

Ces conditions suffisent à déterminer le développement en série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$; en effet, elles se traduisent par les relations :

$$f_0 = 1 \text{ et } q^n f_n = f_n - f_{n-1} \Longrightarrow f_n = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \frac{1}{(q;q)_n}.$$

On a donc, pour $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(q;q)_n} z^n,$$

d'où la formule d'Euler en prenant $z := q$. Il ne semble pas facile de démontrer cette formule sans l'introduction du paramètre supplémentaire !

Exercice 1.3. — *On suppose que $|q| \neq 1$. Démontrer la formule valable dans $\mathbf{C}\{z\}$:*

$$(z;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n} z^n.$$

Préciser le rayon de convergence de cette série.

Exercice 1.4. — *La série convergente*

$$e_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(q;q)_n}$$

est un analogue de la série exponentielle dans le sens que $e_q((1-q))z)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$d_q y = y\,, \text{ où } d_q y(z) = \frac{y(qz) - y(z)}{(q-1)z}.$$

Montrer que

$$e_q(z) e_{q^{-1}}(q^{-1}z) = 1\,.$$

1.1.2. *Le théorème q-binomial de Cauchy (Voir* [14, chap 1.3]*).* — Le théorème du binôme généralisé de Newton peut être écrit sous la forme suivante :

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n, \text{ où } (\alpha)_n := \prod_{0\leq i<n} (\alpha+i).$$

Sa preuve la plus simple consiste à vérifier que les deux membres sont solutions de l'équation différentielle $f' = \dfrac{\alpha}{1-z} f$. Pour le membre droit, cela découle de la relation de récurrence entre ses coefficients : $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{\alpha+n}{n+1} \Longrightarrow (n+1)f_{n+1} = (\alpha+n)f_n$.

En 1843, Cauchy a évalué le « q-analogue » suivant du membre droit (on suppose $|q|<1$) :

$$\phi_q(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n.$$

Pour quelle raison est-ce un q-analogue ? Par exemple, parce qu'en posant $a := q^\alpha$, on vérifie que :

$$\lim_{q\to 1} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} = \frac{(\alpha)_n}{n!}\cdot$$

(Naturellement, il faut un peu de soin pour préciser ce que l'on entend ici par q^α, s'agissant de nombres complexes !) On peut donc voir la famille des $\phi_q(z)$ comme une déformation de paramètre q de la fonction $(1-z)^{-\alpha}$. La méthode la plus simple pour évaluer la série ϕ_q est de convertir la relation de récurrence entre ses coefficients f_n en une équation fonctionnelle :

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1-aq^n}{1-q^{n+1}} \Longrightarrow (1-q^{n+1})f_{n+1} = (1-aq^n)f_n \Longrightarrow f(z)-f(qz) = z\big(f(z)-af(qz)\big).$$

(La dernière relation s'obtient en multipliant la précédente par z^{n+1} et en sommant pour $n\in\mathbf{N}$.) On a donc l'équation aux q-différences d'ordre 1 :

$$f(qz) = \frac{1-z}{1-az} f(z) \Longleftrightarrow f(z) = \frac{1-az}{1-z} f(qz).$$

La deuxième forme nous intéresse parce que l'on peut l'itérer :

$$f(z) = \frac{1-az}{1-z} f(qz) = \frac{1-az}{1-z}\frac{1-aqz}{1-qz} f(q^2z) = \cdots = \frac{1-az}{1-z}\frac{1-aqz}{1-qz}\frac{1-aq^2z}{1-q^2z}\cdots f(0).$$

On obtient ainsi le théorème q-binomial de Cauchy :

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n.$$

Voici une autre explication du statut de q-analogue. L'équation aux q-différences peut s'écrire :

$$\frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z} = \frac{a-1}{q-1}\frac{1}{1-az} f(z).$$