Séminaires & Congrès

COLLECTION SMF

LA CATÉGORIE DES ARBRES ÉLAGUÉS DE BATANIN EST DE KOSZUL

Benoit Fresse

OPERADS 2009

Numéro 26

Jean-Louis Loday & Bruno Vallette, ed.

SOCIÉTE MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Séminaires & Congrès
26, 2011, p. 99–144

LA CATÉGORIE DES ARBRES ÉLAGUÉS DE BATANIN EST DE KOSZUL

by

Benoit Fresse

Abstract. — La définition de la catégorie des arbres élagués, dont les objets sont des arbres planaires à n-niveaux avec toutes les feuilles au niveau supérieur, a été dégagée dans les travaux de M. Batanin, en partie pour comprendre la structure cellulaire de certaines E_n-opérades en termes catégoriques. Le but de cet article est de montrer que la version enrichie en $\Bbbk$-modules de la catégorie des arbres élagués est de Koszul. Ce résultat nous donne un modèle différentiel gradué minimal de cette catégorie, des petits complexes pour calculer des foncteurs Tor et Ext dans les catégories de diagrammes qui lui sont associés, et permet d'étendre aux E_n-algèbres un résultat de M. Livernet et B. Richter sur l'interprétation des constructions bar itérées en termes de foncteurs Tor catégoriques.

***Résumé* (Batanin's category of pruned trees is Koszul).** — The category of pruned trees has been defined by M. Batanin with the aim of understanding the cell structure of certain E_n-operads in categorical terms. The objects of this category are planar trees with n levels so that all leaves are at the top level of the tree. The goal of this article is to prove that the category of pruned trees is Koszul. This result gives us a minimal differential graded model of this category, small complexes to computing Tor and Ext functors in associated categories of diagrams, and allows us to extend to E_n-algebras a result of M. Livernet and B. Richter about the interpretation of iterated bar complexes in terms of categorical Tor functors.

Introduction

La catégorie ensembliste des arbres élagués à n-niveaux, que l'on notera Ω_n^{epi}, est une sous-catégorie de la catégorie des arbres Ω_n qui est définie dans les travaux de M. Batanin sur les ω-catégories faibles [1]. Les éléments de Ω_n représentent, dans

2000 Mathematics Subject Classification. — Primary: 57T30; Secondary: 05C05, 18G15, 18G55, 18D20, 55P48, 06A11.

Key words and phrases. — Catégories de Koszul ; Catégories d'arbres ; Construction bar catégorique ; Homologie des E_n-algèbres.

Recherche soutenue en partie par le contrat ANR-06-JCJC-0042 "OBTH".

l'idée de [1], des schémas de compositions dans les catégories supérieures (on renvoie également aux articles [4, 15] pour des points de vue différents sur cette idée). La catégorie Ω_n^{op}, opposée à Ω_n, possède aussi une définition purement combinatoire, en termes de produits en couronne itérés de la catégorie simpliciale, qui est utilisée dans [6] pour montrer qu'une localisation de la catégorie des Ω_n^{op}-espaces définit un modèle de la catégorie des espaces de lacets n-itérés.

Les objets de Ω_n sont des arbres planaires à n-niveaux. Les objets de Ω_n^{epi} sont les arbres de Ω_n dont toutes les feuilles sont situées au niveau supérieur. Les notions de code-barres [11] et d'ordre complémentaire [17] qui apparaissent dans la définition de certaines E_n-opérades correspondent à différentes représentations des objets de Ω_n^{epi}. L'interprétation de ces catégories d'objets en termes de catégories supérieures permet, selon M. Batanin [2, 3], d'obtenir une caractérisation intrinsèque du type d'homotopie des E_n-opérades, du moins dans le cadre topologique.

Les objets de Ω_n^{epi} interviennent également dans le modèle de Milgram des espaces de lacets itérés [5, 22], dans les travaux de Fox et Neuwirth sur la présentation des groupes de tresses d'Artin [9], et dans la définition des complexes bar itérés [10].

On considère dans cet article la version enrichie en $\Bbbk$-modules de Ω_n^{epi}, pour un anneau de base fixé $\Bbbk$. Cette catégorie elle-même peut se regarder comme une catégorie enrichie en modules différentiels gradués (une dg-catégorie) concentrée en degrée 0. Les constructions usuelles de l'algèbre différentielle graduée ont une généralisation naturelle dans le cadre des dg-catégories. On peut ainsi définir un analogue catégorique des constructions bar et cobar classiques de l'algèbre, puis définir un analogue des complexes de Koszul de [23] pour les catégories munies d'une graduation en poids, et étendre la notion d'algèbre de Koszul, telle qu'elle est définie dans [23], aux catégories. On notera $dg\,Cat_{\Omega_n^{epi}}$ la catégorie des dg-catégories Θ qui ont $\operatorname{Ob}\Theta = \operatorname{Ob}\Omega_n^{epi}$ comme ensemble d'objets.

Le premier objectif de cet article est de montrer que la catégorie Ω_n^{epi} est de Koszul : l'homologie de sa construction bar $B(\Omega_n^{epi})$ se réduit à une cocatégorie enrichie en $\Bbbk$-modules gradués $K(\Omega_n^{epi})$ dont les éléments $\alpha \in K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ représentent des cycles de degré maximal dans le complexe $B(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$, pour tout couple d'objets $(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \in \operatorname{Ob}\Omega_n^{epi} \times \operatorname{Ob}\Omega_n^{epi}$. Ce résultat nous permettra d'obtenir :

(1) un complexe naturel minimal $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ pour calculer les foncteurs $\operatorname{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T)$ sur les catégories de diagrammes associées à Ω_n^{epi}, ainsi qu'un complexe de cochaînes naturel minimal $C(S, \Omega_n^{epi}, T)$ pour calculer les foncteurs $\operatorname{Ext}^*_{\Omega_n^{epi}}(S, T)$;
(2) un modèle cofibrant minimal de Ω_n^{epi} dans $dg\,Cat_{\Omega_n^{epi}}$, donné par une construction cobar $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ sur la cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$.

La construction bar de Ω_n^{epi} dans $dg\,Cat_{\Omega_n^{epi}}$ s'identifie en fait au complexe de chaînes du nerf de la version ensembliste de Ω_n^{epi}. Le résultat obtenu dans cet article permet donc de déterminer l'homologie du nerf de Ω_n^{epi}.

On ne suit pas le plan habituel pour montrer qu'une algèbre est de Koszul. On définit d'abord une cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$ de façon directe que l'on forme avec les $\mathbb{k}$-modules duaux (décalés en degré) des $\mathbb{k}$-modules engendrés par les morphismes ensemblistes de Ω_n^{epi}. On définit aussi un complexe $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ de façon directe, à partir de cette cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$. On démontre, en étendant un argument de [19], que ce complexe satisfait une propriété d'acyclicité, ce qui entraine indirectement que la catégorie Ω_n^{epi} est de Koszul, et que la cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$, duale de Ω_n^{epi} dans les $\mathbb{k}$-modules, est aussi la cocatégorie duale de Ω_n^{epi} au sens de la dualité de Koszul des catégories. On en déduit ensuite que les propriétés (1-2) ci-dessus sont satisfaites pour cette cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$, que nous avons défini de façon directe, et le complexe $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ qui lui est associé.

Cette article comprend une section préliminaire pour fixer le cadre de nos constructions, deux parties principales 1-2, et une section de conclusion.

La section préliminaire servira principalement à préciser nos conventions de base sur les modules différentiels gradués.

La Partie 1 est consacrée à la démonstration de la propriété de Koszul et aux applications du point (1). La définition de la catégorie des arbres élagués Ω_n^{epi} est rappelée au début de cette partie. On introduit ensuite la cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$, puis les complexes à coefficients $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$, avant de prouver les résultats annoncés.

Pour cette partie du travail, on n'aura besoin que des notions de base de l'algèbre homologique – complexes, foncteurs Tor, suites spectrales – dans le cadre additif des catégories de Ω_n^{epi}-diagrammes. Cependant, pour des raisons de cohérence avec la suite de l'article, on utilisera la terminologie d'équivalence faible - issue du langage des catégories modèles - pour désigner tout morphisme d'objets différentiels gradués induisant un isomorphisme en homologie. En outre, on parlera de modules différentiels gradués (dg-modules en abrégé) pour désigner les objets de notre catégorie de base plutôt que de complexes de chaînes. En fait, on réservera la terminologie de complexe à certaines constructions spécifiques sur les modules différentiels gradués. On renvoie le lecteur à la section préliminaire pour un exposé rapide de nos conventions.

La Partie 2 est consacrée à la définition du modèle cofibrant de Ω_n^{epi}, que l'on a annoncée en (2), et aux applications de ce modèle pour la définition d'une bonne catégorie de Ω_n^{epi}-diagrammes homotopiques. On commencera cette partie par une section d'introduction exposant, dans le cadre conceptuel de l'algèbre homotopique, les applications des constructions de l'algèbre différentielle graduée aux dg-catégories.

Le but initial de ce travail était d'étendre aux E_n-algèbres un résultat de M. Livernet et B. Richter sur l'interprétation des constructions bar itérées en termes de foncteurs Tor-catégoriques [19]. Ces applications seront abordées dans la section de conclusion de cet article.

Remerciements. — Je remercie Muriel Livernet pour une série de discussions qui sont à l'origine de ce travail. Je la remercie aussi, ainsi que Bernhard Keller et Éric Hoffbeck, pour des remarques et questions sur la version préliminaire du manuscrit qui m'ont permis d'améliorer la présentation de certaines constructions.

Cadre général

Pour commencer, on reprend la définition de la catégorie des modules différentiels gradués qui fournira le cadre de nos constructions, et on revoit rapidement la définition de sa structure de catégorie modèle. On rappelle aussi des constructions fondamentales – produit tensoriel des modules différentiels gradués, hom-interne, suspension et torsion - qui seront utilisées tout au long de l'article.

0.1. Catégories de dg-modules. — On travaille sur un anneau de base fixé $\mathbb{k}$. On utilisera la catégorie des $\mathbb{k}$-modules et la catégorie des modules différentiels gradués sur $\mathbb{k}$ comme catégories de base. La catégorie des modules différentiels gradués (on dira dg-modules pour abréger) sera notée $dg\,\mathtt{Mod}$. On suppose par convention qu'un dg-module de $dg\,\mathtt{Mod}$ est gradué inférieurement et possède une différentielle interne $\delta : C \to C$ qui diminue le degré de 1. Un $\mathbb{k}$-module peut se voir comme un dg-module concentré en degré 0.

On garde aussi la convention habituelle de nos articles qui est de supposer que les dg-modules de $dg\,\mathtt{Mod}$ sont $\mathbb{Z}$-gradués. Le lecteur pourra faire un choix inverse et supposer que les dg-modules de notre catégorie de base sont concentrés en degré $* \geq 0$, mais certaines constructions (les foncteurs de dg-modules d'homomorphismes notamment) produisent naturellement des modules $\mathbb{Z}$-gradués.

0.2. Structures tensorielles et homomorphismes de dg-modules. — On munit la catégorie des dg-modules de son produit tensoriel usuel

$$\otimes : dg\,\mathtt{Mod} \times dg\,\mathtt{Mod} \to dg\,\mathtt{Mod},$$

qui en fait une catégorie monoïdale symétrique, avec l'isomorphisme de symétrie $\tau : C \otimes D \to D \otimes C$ défini par la règle des signes. On utilisera la notation $\pm$ pour désigner tout signe produit par une application de cet isomorphisme de symétrie.

La catégorie $dg\,\mathtt{Mod}$ possède un hom-interne

$$\mathrm{Hom}_{dg\,\mathtt{Mod}}(-,-) : dg\,\mathtt{Mod}^{op} \times dg\,\mathtt{Mod} \to dg\,\mathtt{Mod}$$

et forme donc une catégorie monoïdale symétrique fermée.

Le dg-module $\mathrm{Hom}_{dg\,\mathtt{Mod}}(C, D)$ est engendré en degré d par les morphismes de $\mathbb{k}$-modules $f : C \to D$ qui augmentent le degré de d. La différentielle de $f : C \to D$ dans $\mathrm{Hom}_{dg\,\mathtt{Mod}}(C, D)$ est donnée par le commutateur gradué de f avec les différentielles internes :

$$\delta(f) = \delta f - \pm f \delta.$$

Le signe $\pm$ est déterminé par la commutation de f, de degré d, avec le symbole de différentielle interne δ, de degré -1. Donc, dans cette formule, on a $\pm = (-1)^{\deg f}$. On utilise la terminologie d'homomorphisme de dg-modules pour désigner les éléments de ce dg-hom $\mathrm{Hom}_{dg\,\mathtt{Mod}}(C, D)$ et les distinguer des morphismes actuels de la catégorie des dg-modules.

Le dg-hom $\mathrm{Hom}_{dg\,\mathtt{Mod}}(C, D)$ est naturellement $\mathbb{Z}$-gradué, même lorsque les dg-modules sont concentrés en degré $* \geq 0$. On peut prendre une troncature en degré $* \geq 0$ de ce dg-module pour construire un hom interne dans la catégorie des