Problèmes de similarité pour les opérateurs sur l'espace de Hilbert

Gilles Pisier*

Résumé

Deux opérateurs T_1 et T_2 sur un espace de Hilbert H sont dits semblables s'il existe un opérateur inversible S sur H tel que $T_1 = S^{-1}T_2S$. Un problème classique (le « problème de Halmos ») demande de caractériser les opérateurs T semblables à une contraction. Deux autres variantes de ce problème sont apparues : l'une, proposée par Dixmier en 1950 concerne la caractérisation des groupes moyennables, l'autre, due à Kadison en 1955, les représentations de C^*-algèbres. Cet article tente de faire le point sur ces problèmes.

Abstract

Two operators T_1, T_2 on a Hilbert space are called similar if there exists an invertible operator S on H such that $T_1 = S^{-1}T_2S$. A classical problem (the "Halmos problem") asks for a characterization of the operators T which are similar to a contraction. Two important variants have appeared. One proposed by Dixmier in 1950 asks whether the similarity property for all uniformly bounded representations on a group G is equivalent to the amenability of G. The other one, proposed by Kadison in 1995, is about representations of a C^*-algebra. This report attempts to describe the genesis and the present state of these problems.

Cet exposé est consacré à plusieurs problèmes de similarité pour les opérateurs linéaires bornés $T : H \to H$ sur un espace de Hilbert H. On note

---

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A60, 17B10, 22E46

*Équipe d'Analyse - URA 754-CNRS Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, Boîte 186, 4 place Jussieu 75252 Paris Cedex 5

$B(H)$ l'algèbre formée de ces opérateurs munie de la norme usuelle et $GL(H)$ le sous-groupe des éléments inversibles.

Définition. — Deux opérateurs T_1, T_2 dans $B(H)$ sont dits « semblables » s'il existe S inversible dans $B(H)$ tel que $S^{-1}T_1S = T_2$.

Comme pour les matrices, cela revient à dire qu'il existe un changement de base (oblique, pas orthonormale) qui transforme T_1 en T_2. Plus généralement, si $(T_1^i)_{i\in I}$ et $(T_2^i)_{i\in I}$ sont deux familles dans $B(H)$, on dit qu'elle sont semblables s'il existe S inversible dans $B(H)$ tel que $S^{-1}T_1^iS = T_2^i$ pour tout i dans I.

En théorie des opérateurs sur l'espace de Hilbert, on appelle *contraction* tout opérateur T tel que

$$\|T\| \ \leq 1.$$

Le principal problème qui nous intéresse ici est de reconnaître les opérateurs T qui sont semblables à une contraction ou bien les familles d'opérateurs qui sont semblables à une famille de contractions.

Ce problème est apparu sous diverses formes à partir de 1946 d'abord pour des groupes d'opérateurs ou bien pour des semi-groupes, le cas d'un seul opérateur T correspondant aux groupes (ou semi-groupes) engendrés par un unique générateur. Parallèlement, sont apparues des « versions linéarisées » de ces questions pour les sous-algèbres de $B(H)$. Nous proposons ici une présentation rétrospective de ces problèmes (pour la plupart toujours ouverts) en nous attachant à souligner les relations existant entre eux et leur connections avec d'autres théories. De plus, nous introduisons le concept d'application « complètement bornée », qui est l'un des principaux nouveaux outils que les recherches sur ces questions ont contribué à dégager.

La « théorie des opérateurs » sur l'espace de Hilbert est un sujet très vaste, surtout si l'on y ajoute la « théorie des algèbres d'opérateurs » (qui, bien que proche de la précédente, correspond en fait à un groupe de chercheurs très différent). Nous ne ferons qu'effleurer ces théories. Pour la première, nous renvoyons le lecteur au livre classique [Sz.-Nagy et Foias 1970] que l'on peut considérer comme « fondateur » de la théorie contemporaine des opérateurs, celle que l'on trouve développée dans le *Journal of Operator Theory*, créé en Roumanie en 1979. Voir aussi la cinquantaine de volumes de la série *Operator Theory: Advances and applications* et la revue *Integral equations and operator theory* (depuis 1979) publiés par Birkhäuser et dirigés par I. Gohberg à Tel Aviv. Pour les algèbres d'opérateurs, les références classiques sont les livres bien connus de J. Dixmier (*C^*-algèbres* et *algèbres de von Neumann*) eux-mêmes fortement influencés par la série d'articles (*On rings of operators*) publiés par Murray et von Neumann dans *Annals of Mathematics* entre 1936 et 1943. Pour une référence générale plus récente, voir [Kadison et Ringrose 1986] et aussi, dans une autre direction, [Connes 1990].

Le problème de similarité pour les groupes remonte à Sz.-Nagy [1946] et Dixmier [1950]. Pour les opérateurs individuels les références initiales sont [Sz.-Nagy 1959] et [Halmos 1970]. Enfin pour les C^*-algèbres, le problème remonte à Kadison [1955].

Dans le texte qui va suivre, nous traitons d'abord le cas des groupes d'opérateurs plongés dans $B(H)$ (§1), puis le cas d'un opérateur individuel ou d'un semi-groupe (§2) et enfin nous considérons un problème analogue pour les homomorphismes sur une C^*-algèbre (§ 3). Enfin, nous montrons au § 4 comment la théorie récente des applications « complètement bornées » permet d'unifier ces différents problèmes.

Nous renvoyons le lecteur à notre livre récent [Pisier 1995] pour plus de détails.

1. Groupes

Le résultat qui suit est à la racine de toutes les études ultérieures sur les opérateurs semblables.

Théorème 1.1. — [Sz.-Nagy 1946] *Soit T un opérateur inversible dans $B(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. *T et T^{-1} sont tous deux semblables à une contraction.*

ii. *T est semblable à un opérateur unitaire.*

iii. $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty.$

Remarque 1.2. — Il est important de noter que si T est inversible, dire que T et T^{-1} sont tous deux des contractions revient à dire que T est unitaire (= inversible isométrique).

Preuve.— Les implications (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) sont triviales. Reste à montrer (iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons (iii). Soit $C = \sup\{\|T^n\| \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Sur H on définit une nouvelle norme hilbertienne comme suit

$$\forall h \in H \ |||h|||^2 = \lim_u \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|T^k h\|^2$$

où u est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ (Sz.-Nagy utilisait ici une « limite de Banach » plus classique !). On a évidemment $\frac{1}{C}\|h\| \leq |||h||| \leq C\|h\|$ et de plus $|||Th||| \leq |||h|||$ pour tout h. (Noter que c'est la condition sur les inverses de T qui garantit la non–dégénérescence, c'est-à-dire que $\|h\| \leq C|||h|||$. Sans cette condition, on risquerait de trouver $|||h||| \equiv 0$!) $\square$

La généralisation suivante est due à Dixmier (et aussi, indépendamment à Day [1950]) qui s'est rendu compte qu'il s'agissait d'un phénomène dû à la « moyennabilité » de $\mathbb{Z}$ (voir la définition plus loin).

Théorème 1.3. — [Dixmier 1950] *Soit G un groupe localement compact. Soit $\pi : G \to GL(H)$ une représentation continue (pour la topologie forte des opérateurs sur H) et uniformément bornée,* i.e. *telle que*

$$\sup_{t\in G} \|\pi(t)\|_{B(H)} < \infty.$$

On pose

$$|\pi| = \sup_{t\in G} \|\pi(t)\|_{B(H)}.$$

Alors si G est moyennable, il existe $S : H \to H$ inversible avec $\|S\|\,\|S^{-1}\| \leq |\pi|^2$ tel que $t \to S^{-1}\pi(t)S$ soit une représentation unitaire. On dit alors que π est « unitarisable ».

La notion de groupe moyennable remonte semble-t-il à von Neumann [1929] dont le nom apparaît de façon fondamentale dans tous les aspects des problèmes considérés dans cet exposé.

Un groupe localement compact G est dit moyennable s'il existe une forme linéaire positive $\phi : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ avec $\|\phi\| = \phi(1) = 1$ qui est invariante à gauche, *i.e.* telle que $\phi(b) = \phi(\delta_t * b)$ pour tout t dans G. Cela inclut à la fois tous les groupes commutatifs (en particulier $\mathbb{Z}$) et tous les groupes compacts. Si G est discret, cela veut dire qu'il admet un analogue des « limites de Banach ». Voir [Pier 1984] pour plus d'informations.

L'article de Dixmier se termine par les deux questions suivantes :

Problème 1.4. — [Dixmier 1950] *Existe-t-il des groupes G admettant une représentation uniformément bornée $\pi : G \to GL(H)$ mais non unitarisable ?*

Problème 1.5. — [Dixmier 1950] *Si oui, la classe de tels groupes est-elle exactement la classe des groupes non moyennables ? (En d'autres termes, le Théorème 1.3. admet-il une réciproque ?)*

Un exemple typique de groupe discret non moyennable est le groupe libre $\mathbf{F}_N$ à $N \geq 2$ générateurs. Plus généralement, tout groupe discret contenant $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe n'est pas moyennable.

Le problème 1.4. a été résolu par Ehrenpreis et Mautner [1955] qui ont montré que $G = SL_2(\mathbb{R})$ est un contre-exemple. Leur travail fut ensuite clarifié et considérablement amplifié par Kunze et Stein [1960]. Ces derniers construisent en fait toute une famille analytique $\{\pi_z \mid 0 < Re\, z < 1\}$ de représentations uniformément bornées qui ne sont unitarisables que si $Re\, z = \frac{1}{2}$ ou bien si $z \in \mathbb{R}$. Pour des extensions ultérieures, voir [Sally 1968].

L'article Kunze et Stein [1960] contient aussi des applications remarquables aux convoluteurs bornés de $L_p(G)$ pour $G = SL_2(\mathbb{R})$. C'est ce qu'on appelle le « phénomène de Kunze-Stein » : pour $f \in L_p(G),\ g \in L_2(G)$ on a $f * g \in L_2(G)$ si $1 \leq p < 2$. Ce dernier résultat n'est pas valable pour $G = \mathbb{R}$. Pour des résultats plus récents sur ce phénomène, voir [Cowling 1978, 1982].

Bien entendu, puisque $SL_2(\mathbb{R})$ est un contre-exemple au problème 1.4., a fortiori $SL_2(\mathbb{R})$ muni de la topologie discrète en est aussi un, et comme tout groupe est un quotient d'un groupe libre, il en résulte que les groupes libres (et plus précisement $\mathbf{F}_N$ pour tout $N \geq 2$) fournissent des contre-exemples. Il était donc naturel de chercher des constructions explicites, aussi simples que possibles, de représentations uniformément bornées et non unitarisables sur $\mathbf{F}_N (N \geq 2)$. C'est l'objet de la série de publications : Mantero et Zappa [1983], Figà-Talamanca et Picardello [1983], Bożejko et Fendler [1991], Pytlik et Szwarc [1986], Bożejko [1987b], Szwarc [1988], Fendler [1990], Wysoczanski [1993].

Pour une autre approche, voir [Valette 1990b,a]. L'analyse harmonique sur le groupe libre est développée dans [Cartier 1973], puis [Figà-Talamanca et Picardello 1983].

Signalons aussi que Jean Dieudonné lui-même s'est intéressé aux groupes moyennables, voir Dieudonné [1960].

Le problème 1.5. reste ouvert en toute généralité. Néanmoins d'après un argument classique d'« induction des représentations » (qui s'étend aisément au cas uniformément borné), tout groupe G contenant $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe admet une représentation uniformément bornée non unitarisable. On a longtemps cru (c'était un problème fameux posé par von Neumann dès 1929) que tout groupe non moyennable contenait $\mathbf{F}_2$ comme sous-groupe (ce qui aurait résolu affirmativement le problème 1.5.). C'est vrai pour les groupes linéaires, d'après un théorème classique de Tits [1972], mais faux en général : en effet Olshanskii [1980] a construit un groupe non moyennable dans lequel tout sous-groupe non trivial est une copie de $\mathbb{Z}$. Son travail est très proche des contre-exemples de Novikov et Adian [1968] sur le problème de Burnside (cf. [Adian 1979]).

Le moins qu'on puisse dire est que ces exemples sont difficiles à comprendre (voir [Paterson 1988] pour une description esquissée).