Naissance des fibrés et homotopie

Beno Eckmann*

Home is where one starts from. As one grows older
the world becomes stranger, the pattern more complicated
of dead and living

T.S. Eliot

Résumé

Il s'agit d'un épisode de l'histoire des mathématiques bien délimité dans son sujet et dans le temps : les origines de la théorie homotopique des espaces fibrés, de 1935 à 1950 environ (les débuts de la théorie des fibrés vectoriels, avec groupe de structure, etc. ne sont pas abordés). Durant cette période, la combinaison des idées de Hurewicz sur les groupes d'homotopie avec la notion de fibré suggérée par les « fibrations de Hopf » a livré une foule de résultats inattendus. Beaucoup de développements ultérieurs d'une importance fondamentale en topologie, en algèbre et au-delà, trouvent leur origine dans cet épisode.

Abstract

This is about an episode in the history of mathematics, very much restricted in content and in time: the origins of the homotopy theory of fibre spaces, roughly from 1935 to 1950 (the beginnings of the theory of vector bundles — fibre bundles, structure group, etc. — are not treated). During that period, the combination of Hurewicz's ideas concerning homotopy groups with the concept of fibre space suggested by the "Hopf fibrations" has led to a great

AMS 1991 *Mathematics Subject Classification*: 01A60, 55-03

*Forschungsinstitut für Mathematik, ETH-Zentrum, Ch–8092 Zürich, Suisse

number of unexpected results. Many later developments of fundamental importance in topology, algebra, and mathematics in general have their origin in this episode.

Dans cet exposé je traite un épisode de l'histoire des mathématiques bien délimité dans son sujet et dans le temps : les origines de la théorie homotopique des espaces fibrés, de 1935 à 1950 environ. Je le raconte plus ou moins comme je l'ai vécu moi-même – donc de façon assez personnelle.

Deux avertissements :

1. Les débuts de la théorie des fibrés vectoriels (avec groupe de structure, « fibre bundles », « sphere bundles ») qui datent à peu près de la même période, ne seront pas abordés. Je me borne aux résultats et problèmes liés à l'homotopie.
2. En parlant de « nous » je pense d'un côté au groupe des élèves de Heinz Hopf, de l'autre aux trois auteurs ou groupe d'auteurs qui ont développé indépendamment le sujet, les communications ayant été interrompues par la guerre : Ehresmann et Feldbau [1941], Hurewicz et Steenrod [1941], et moi-même [Eckmann 1941-42a]. Quant aux références j'ai la chance de pouvoir utiliser la bibliographie de l'ouvrage monumental de Dieudonné : *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960* [Dieudonné 1989].

Les débuts étaient simples. Nous avons réalisé que l'on pouvait combiner les idées de Hurewicz [1935, 1936] sur les groupes d'homotopie avec la notion de fibré suggérée par les fibrations de Hopf [1935]. Il en sortait une foule de résultats nouveaux et de problèmes intéressants. On peut dire que beaucoup de développements ultérieurs en topologie, algèbre et dans bien d'autres disciplines ont leur origine dans cet épisode ; ils ont créé un réseau toujours plus complexe de disciplines et de relations entre elles – tout en contribuant à l'unité des mathématiques.

1. Fibrations de Hopf et généralisation

1.1. Le terme « fibration » au sens de cet exposé apparaît pour la première fois en 1935 dans le mémoire de « Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension ». En annexe on trouve les « fibrations de

Hopf » de sphères en sphères

$$\begin{aligned} p:\quad & S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n, \text{ fibre } S^1 \\ p:\quad & S^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}P^n, \text{ fibre } S^3 \\ p:\quad & S^{15} \longrightarrow \mathbb{O}P^1, \text{ fibre } S^7 \end{aligned}$$

Elles s'obtiennent en représentant la sphère par des coordonnées $z_0, z_1, ..., z_n$, respectivement nombres complexes, quaternions, et octonions (nombres de Cayley), et en passant aux coordonnées homogènes $z_0 : z_1 : ... : z_n$. $\mathbb{C}P^n$ est l'espace projectif complexe, $\mathbb{H}P^n$ l'espace projectif quaternionien, et $\mathbb{O}P^1$ la droite projective des octonions – dans ce dernier cas, seul $n = 1$ est possible puisque les octonions ne sont pas associatifs. Le cas $n = 1$ donne les fibrations $S^3 \longrightarrow S^2$ et $S^7 \longrightarrow S^4$ et $S^{15} \longrightarrow S^8$. La projection p est une application continue, et la préimage $p^{-1}(x)$ d'un point x est S^1, S^3, S^7 respectivement. Ainsi les sphères en question sont décomposées de façon très spéciale en sphères S^1, S^3, ou S^7.

1.2. Sans en avoir donné une définition, Hopf appelait simplement ces décompositions des fibrations. Cette expression avait été utilisée auparavant par Seifert [1932] dans un cas assez particulier concernant les variétés à 3 dimensions, où interviennent des fibres « exceptionnelles » ; ce concept est resté intéressant jusqu'à ce jour. Peu après nous avons remarqué qu'il s'agissait d'une situation que l'on rencontrait en géométrie dans beaucoup d'autres cas : on était en présence d'une application continue $p:\ E \longrightarrow B$ où toutes les préimages $p^{-1}(b) = F_b,\ b \in B$ sont homéomorphes entre elles, et où chaque point $b \in B$ a un voisinage U tel que $p^{-1}(U)$ est homéomorphe, grâce à p, à $U \times F_b$. On dit que E est un espace fibré (localement trivial), B est la base, p la projection, et les F_b sont les fibres, homéomorphes à une fibre-type F.

1.3. Exemples typiques :

1. E est l'espace des vecteurs tangents unités d'une variété différentiable B de dimension n (munie d'une métrique riemannienne), F_b l'ensemble des vecteurs tangents unités en b, $F = S^{n-1}$.
2. E est un groupe de Lie, F un sous-groupe fermé, B l'espace homogène correspondant.
3. $E = V_{n,m}$, $(m \leq n)$, l'espace des m-repères orthonormés dans $\mathbb{R}^n$, $B = V_{n,m-1}$ obtenu en omettant le dernier vecteur, et $F = S^{n-m}$. Analogue unitaire dans $\mathbb{C}^n$, et d'autres obtenus en remplaçant $m-1$ par $m-k$.
4. Cas particulier de 2) et 3). $E = U(n)$, $\ F = U(n-1)$ et $B = S^{2n-1}$, et de manière analogue pour les groupes orthogonaux.

Dans tous ces cas la projection p est l'application évidente.

2. Groupes d'homotopie

En 1935 également, puis en 1936, apparaissaient les Notes de Hurewicz « Beiträge zur Topologie der Deformationen ». Il fut vite évident qu'il s'agissait d'une chose très différente de ce qu'on avait fait auparavant en topologie algébrique (dite « combinatoire » à l'époque) – à l'exception du groupe fondamental dont les groupes d'homotopie $\pi_n(X), n = 1, 2, 3, ...$ étaient, bien sûr, une généralisation. Déjà inventés par Čech [1932], ces groupes étaient redéfinis et utilisés par Hurewicz avec des résultats inattendus. D'autre part ils nous apparurent, un peu plus tard, merveilleusement adaptés aux fibrations pour les questions homotopiques.

2.1. Rappelons d'abord rapidement les définitions. On considère des espaces X pointés, c'est-à-dire munis d'un point-base x_0. Les applications ainsi que les homotopies sont continues et pointées (respectant les point-bases). Les éléments de $\pi_n(X)$ sont les classes d'homotopie des applications $S^n \longrightarrow X$, le point-base de S^n étant s_0. Soit h une application standard du cube unité I^n dans S^n qui est un homéomorphisme de l'intérieur de I^n sur $S^n - s_0$ et qui envoie le bord $\dot{I}^n$ de I^n sur s_0 ; par l'intermédiaire de h on peut identifier $\pi_n(X)$ à l'ensemble des classes d'homotopie $I^n, \dot{I}^n \longrightarrow X, x_0$. En choisissant une direction distinguée on décompose I^n en $I^1 \times I^{n-1}$. L'opération de groupe est alors définie par $f+g$ comme suit : $I = \{0 \leq t \leq 1\}$ est divisé en $I_1 = \{0 \leq t \leq 1/2\}$ et $I_2 = \{1/2 \leq t \leq 1\}$. On comprime alors f sur $I_1^1 \times I^{n-1}$ et g sur $I_2^1 \times I^{n-1}$ et l'on obtient $f + g$. Pour $n = 1$ c'est bien l'addition (non-commutative en général) du groupe fondamental $\pi_1(X)$. La définition est compatible avec les homotopies, et les axiomes de groupe se vérifient exactement comme pour $\pi_1(X)$. En particulier, l'élément neutre est la classe de l'application constante (sur le point-base). De façon générale, quel que soit l'espace qu'on applique dans X, une application de cette classe est dite « homotope à zéro ». Pour simplifier la présentation je me permets de ne pas toujours distinguer entre une application f et sa classe d'homotopie.

Une application $h : X \longrightarrow Y$ induit, par composition $S^n \longrightarrow X \longrightarrow Y$, un homomorphisme $h_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$. On voit facilement que pour un revêtement $\overline{X} \longrightarrow X$ les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ et $\pi_n(\overline{X})$ sont isomorphes pour $n \geq 2$. Par exemple $\pi_n(S^1) = \pi_n(\mathbb{R}) = 0$ pour $n \geq 2$. D'autres propriétés élementaires : $\pi_i(S^n) = 0$ pour $i < n$ (par approximation simpliciale on est dans $S^n - s_0$ qui est contractile), et $\pi_i(X \times Y) = \pi_i(X) \times \pi_i(Y)$. Si X est simplement connexe, alors l'homotopie pointée est équivalente à l'homotopie libre.

2.2. Si X est un H-espace, c.-à-d. un espace muni d'une multiplication notée $x \cdot x'$, continue avec élément neutre e à homotopie près, on constate sans peine que

$$(f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2,$$

toujours à homotopie près. D'où, e étant l'application constante,

$$(f + e) \cdot (e + g) = f + g = f \cdot g,$$
$$(e + g) \cdot (f + e) = f + g = g \cdot f.$$

Il s'ensuit que $f+g$ peut être donné par la multiplication dans X, et que $f+g = g + f$. Ainsi pour un groupe topologique G, $\pi_1(G)$ est abélien – ce qui était bien connu avant. Mais de façon générale, pour X arbitraire, les applications $I^n, \dot{I}^n \longrightarrow X, x_0$ peuvent être identifiées aux applications $I^{n-1}, \dot{I}^{n-1} \longrightarrow \Omega X, x_0$ où ΩX est l'espace des applications $I, \dot{I} \longrightarrow X, x_0$ (l'espace des lacets de X en x_0). On a donc $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$ pour $n \geq 2$. Mais ΩX est un H–espace par la composition des lacets.

Les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont donc abéliens pour tout X et pour tout $n \geq 2$. On dit que pour cette raison, lorsque ces groupes furent présentés par Čech en 1932, on ne croyait pas qu'ils pourraient être intéressants.

2.3. *Deux « miracles » :*

1. Avec surprise nous avions constaté que l'on pouvait donner une démonstration très simple et transparente du fait que

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z},$$

l'isomorphisme étant donné en associant à $f : S^n \longrightarrow S^n$ son degré. En effet, par les méthodes d'approximation simpliciale on voit sans peine que le degré est un invariant d'homotopie, et que l'on a :

a) l'application degré : $\pi_n(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme, et

b) $\pi_n(S^n)$ est engendré par l'identité (degré = 1).

En d'autres termes, on retrouve le théorème de Hopf [1933] qui dit que deux applications $S^n \longrightarrow S^n$ ayant même degré sont homotopes.

2. A l'aide de la suite exacte des fibrations, dont il sera question dans la section suivante, on constate que

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z},$$

engendré par la fibration de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$. Donc, en particulier, il existe une infinité d'applications non-homotopes $S^3 \longrightarrow S^2$. Ce fait avait été établi en