Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 119–131

DESCENTE, CHAMPS ET GERBES DE HURWITZ

par

Jean-Claude Douai

Résumé. — Nous montrons comment les notions de gerbe et de champ introduites par A. Grothendieck interviennent naturellement dans la théorie des revêtements. À un G-revêtement $\overline{f}$ de corps des modules K est associée une K-gerbe $\mathcal{G}(\overline{f})$ liée par le centre $Z(G)$ de G qui est, en fait, la gerbe résiduelle en le point Spec$K$ d'un champ algébrique plus général défini sur $Z[\frac{1}{|G|}]$. Nous montrons ensuite comment l'utilisation des approximations diophantiennes dans les gerbes et les champs conduit à des résultats du type Principe de Hasse.

***Abstract* (Descent, Stacks and Hurwitz Gerbs).** — We show that the notions of gerb and stack intoduced by Grothendieck occur naturally in the theory of coverings. To a G-covering $\overline{f}$ of the field of moduli K is associated a K-gerb $\mathcal{G}(\overline{f})$ bound by the center $Z(G)$ of G. This gerb is, in fact, the residual gerb in the point Spec$K$ of a more general algebraic stack defined over $Z[\frac{1}{|G|}]$. We can use the diophantine approximations in the gerbs and stacks to get result of the type Hasse Principle.

1. La philosophie de Grothendieck [Gr]

Comme nous voulons étudier des problèmes de modules de courbes et plus particulièrement de modules de G-revêtements (courbes avec action d'un groupe fini G), nous aurons besoin de la notion de « champ » introduite par Grothendieck, notion plus riche que celle d'espace de modules et, en particulier, que celle d'espace de modules grossiers.

Commençons par rappeler la définition d'une catégorie fibrée en groupoïdes sur une catégorie B.

Définition 1. — *Soit B une catégorie. Une* catégorie fibrée *en groupoïdes sur B est formée*

1) *pour tout $U \in \mathrm{ob}(B)$, d'un groupoïde $\mathcal{G}_U$ (appelé fibre de U),*

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 18G50, 14E20, 14Dxx, 14D22.
Mots clefs. — Champs, gerbes, revêtement, descente, modules grossiers, modules fins.

2) *pour tout* $f : V \to U$ *morphisme de* B*, d'un foncteur*

$$f^* : \mathcal{G}_U \longrightarrow \mathcal{G}_V, \qquad f^*(x) = x \times_U V$$

3) *pour 2 morphismes composables* $W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} U$ *dans* B*, d'un isomorphisme de foncteurs*

$$c_{f,g} : (gf)^* \longrightarrow f^* g^*$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$*,*

(ii) $c_{f,g}$ *est l'isomorphisme identique si* f *ou* g *est un isomorphisme identique,*

(iii) *étant donné trois morphismes composables* $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Z$ *on a commutativité du diagramme d'isomorphismes*

$$\begin{tikzcd}
\Big(h(gf)\Big)^* = \Big((hg)\cdot f\Big)^* \arrow[r] \arrow[d] & f^*(hg)^* \arrow[d] \\
(gf)^* h^* \arrow[r] & (f^* g^*) h^* = f^*(g^* h^*)
\end{tikzcd}$$

Exemple. — Soit B la catégorie des schémas, $S \in \mathrm{ob}(B)$, $\mathcal{G}_S$ = groupoïde des courbes stables de genre g sur S, les morphismes de $\mathcal{G}_S$ étant les isomorphismes entre courbes stables sur S. $\mathcal{G}$ est une catégorie fibrée en groupoïdes sur la catégorie des schémas.

Nous supposerons à partir de maintenant B munie d'une topologie de Grothendieck.

Descente effective : l'exemple de base topologique. — Considérons une catégorie fibrée en groupoïdes $\mathcal{G}$ sur le site des ouverts d'un espace topologique. Soient U un objet de ce site, (U_i) un recouvrement de U. Nous avons la résolution de Čech correspondante :

$$\coprod_{i,j,k} U_{ijk} \mathrel{\substack{\to\\\to\\\to}} \coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i \to U$$

où $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.

Au-dessus de chaque U_i, donnons-nous un objet $x_i \in \mathrm{ob}(\mathcal{G}_{U_i})$. Une condition *nécessaire* pour qu'il existe $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{G}_U)$ tel que $x|_{U_i} \simeq x$ dans $\mathcal{G}_{U_i}$ *i.e.* pour que les x_i se recollent en x est qu'il existe une famille d'isomorphismes

$$(*) \qquad f_{ij} : (x_i|U_{ij}) \simeq (x_j|U_{ij}) \quad \text{dans} \quad \mathcal{G}_{U_{ij}}$$

satisfaisant à la condition de 1-cocycle :

$$(**) \qquad (f_{ij}|U_{ijk}) = (f_{ik}|U_{ijk}) \circ (f_{kj}|U_{ijk})$$

La donnée d'une famille d'isomorphismes

$$f_{ij} : (x_i|U_{ij}) \simeq (x_j|U_{ij})$$

comme en $(*)$ est appelée une donnée de recollement. Une donnée de recollement est appelée une donnée de descente si la condition $(**)$ de cocycle est satisfaite.

Une donnée de descente est dite *effective* s'il existe effectivement un $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{G}_U)$ tel que $(x|U_i) \simeq x_i$. Il revient alors au même de se donner un objet x de $\mathcal{G}_U$ ou une famille d'objets x_i dans $\mathcal{G}_{U_i}$ munie d'une donnée de descente effective.

Dans ce qui suit, B sera un site de base quelconque et pourra, par exemple, être la catégorie des schémas sur un schéma donné S munie de la topologie étale (ou f.p.q.c). Supposons que les produits fibrés existent dans B. Noter que dans le site B, les morphismes ne sont plus nécessairement des monomorphismes comme dans le site précédent des ouverts d'un espace topologique, les intersections étant, quant à elles, remplacées par les produits fibrés.

Définition 2. — *Un* champ $\mathcal{C}$ *sur* B *est une catégorie fibrée en groupoïdes sur* B *telle que*

(i) *Pour un objet* U *de* B *et deux objets* x, y *de* $\mathcal{C}_U$*, le foncteur de* B/U *vers les ensembles*

$$\begin{array}{rl}\mathrm{Isom}(x,y) : (V \xrightarrow{\varphi} U) \rightsquigarrow & \mathrm{Hom}(x|_V, y|_V) \\ & \qquad \| \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_V}(\varphi^* x, \varphi^* y)\end{array}$$

est un faisceau.

(ii) *Si* $\varphi_i : U_i \to U$ *est une famille couvrante dans* B*, toute donnée de descente relativement aux* φ_i *sur des objets* x_i *de* $\mathcal{C}_{U_i}$ *est* effective.

La condition (i) dans la définition de champ signifie que les morphismes dans $\mathcal{C}$ se recollent.

La condition (ii), quant à elle, signifie que les objets dans $\mathcal{C}$ se recollent. Ce dernier point s'explicite comme suit (*cf.* l'exemple de base topologique) :

Soient $x_i \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}_{U_i})$, $f_{ij} : (x_i|U_{ij}) \simeq (x_j|U_{ij})$ une famille d'isomorphismes (*i.e.* une donnée de recollement) dans $\mathcal{C}_{U_{ij}}$ satisfaisant la condition de 1-cocycles

$$(f_{ij}|U_{ijk}) = (f_{ik}|U_{ijk}) \circ (f_{kj}|U_{ijk}),$$

où $U_{ij} = U_i \times_U U_j$, $U_{ijk} = U_i \times_U U_j \times_U U_k$.

Comme dans l'exemple de base topologique, dire que la donnée de descente (x_i, f_{ij}) est *effective* signifie qu'il existe $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}_U)$ et des isomorphismes $f_i : (x|U_i) \simeq x_i$ dans $\mathcal{C}_{U_i}$ tels que $(f_i|U_{ij}) = f_{ij} \circ (f_j|U_{ij})$.

La condition (i) assure alors que l'objet x muni de la famille (f_i) est unique à isomorphisme canonique près. Grothendieck a énoncé une série de cas dans lesquels toute donnée de descente dans une catégorie fibrée en groupoïdes est effective. Citons deux cas :

1) Soit B la catégorie des schémas munis de la topologie f.p.q.c. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie fibrée en groupoïdes des schémas affines au-dessus de B, alors toute donnée de descente sur $\mathcal{C}$ est effective. En particulier, si G est un groupe affine, tout fibré principal homogène sous G est aussi affine. On pourra donc « effectivement » recoller de tels fibrés.

2) Supposons le recouvrement $U_i \to U$ réduit à un unique morphisme $\alpha : V \to U$ (supposé f.p.q.c.). Pour qu'une donnée de descente sur un schéma x'/V relativement à α soit effective, il faut et il suffit que x' soit réunion d'ouverts x'_i affines sur V qui soient stables par la donnée de descente sur x'. Il en est ainsi (critère de Weil) si α est fini et si toute partie finie de x' contenue dans une fibre de x' sur V est contenue dans un ouvert de x' affine sur V (ce qui est le cas par exemple si x'/V est quasi-projectif et alors le schéma descendu x/U est aussi quasi-projectif).

Exemples de champs. — Dans la suite, B désignera la catégorie des schémas munie de la topologie étale.

1) Soit $\mathcal{M}_g$ la catégorie fibrée en groupoïdes sur B dont les objets au-dessus d'un schéma S sont les S-courbes stables de genre g. $\mathcal{M}_g$ est un B-champ.

2) (G-variante de l'exemple précédent) : soient G un groupe fini et S un schéma au dessus de $Z[\frac{1}{|G|}]$, $\mathcal{M}_{g,G,S}$ le $B_{/S}$-champ des courbes stables de genre g munie d'une action admissible de G (*cf.* la définition 3.1 de [**Ek**]). $\mathcal{M}_{g,G}$ est un champ algébrique sur $Z[\frac{1}{|G|}]$ d'après [**Ek**] (pour la définition d'algébrique, on renvoie au paragraphe 5).

3) Soient K un corps, S une K-variété régulière, projective, géométriquement irréductible où K est un corps, G un K-groupe fini constant, D un K-diviseur de S, et $\overline{f}$ un $\overline{K}$-G-revêtement de S de corps des modules K (*cf.* § II) où $\overline{K}$ est la clôture séparable de K. Supposons $\overline{f}$ ramifié le long de $\overline{D} = D \otimes_K \overline{K}$. Soit S^* le K-ouvert $S - D$. On associe à $\overline{f}$ le $K_{\text{ét}}$-champ suivant $\mathcal{G}(\overline{f})$ où $K_{\text{ét}}$ désigne le site étale de K : pour $U = (\operatorname{Spec} E \to \operatorname{Spec} K)$ un objet de $K_{\text{ét}}$,

– les U-objets de $\mathcal{G}(\overline{f})$ sont les E-modèles f de $\overline{f}$ *i.e.* les homomorphismes $\psi_E : \Pi_E(S^*) = \Pi_1(S^* \otimes_K E) \to G$ qui induisent sur $\Pi_{\overline{K}}(S^*)$ un conjugué par G de l'homomorphisme $\psi_{\overline{K}}$ associé à $\overline{f}$ (pour le rôle des points-base dans le Π_1, *cf.* le n° 2.3 de [**D-D.1**]).

– les U-morphismes de $\mathcal{G}(\overline{f})$ sont les E-isomorphismes entre E-modèles précédents.

Les modèles précédents se recollent dans $\mathcal{G}(\overline{f})$ *i.e.* toute donnée de descente y est effective (Critère de Weil).

Les exemples 1) et 3) sont aussi des exemples de champs algébriques.

4) Pour chaque schéma $T \in \operatorname{ob}(B)$, soit $\operatorname{Cov}^{d,g}(T)$ la catégorie dont les objets sont les T-morphismes $\Pi : X \to \mathbb{P}^1_T$ où

– X est un T-schéma propre dont les fibres géométriques sont des courbes lisses, réduites connexes de genre g,

– Π un T-morphisme fini et localement libre de degré d,

– pour chaque point géométrique ξ de T, le morphisme $\Pi_\xi : X_\xi \to \mathbb{P}^1_{\kappa(\xi)}$ est séparable (*i.e.* le lieu étale de Π dans X est surjectif sur T).

– les morphismes dans $\operatorname{Cov}^{d,g}(T)$ sont les $\mathbb{P}^1_T$-isomorphismes.

$\operatorname{Cov}^{d,g}$ est un B-champ ; c'est même un B-champ algébrique de type fini sur Z.

5) Fixons un entier $d > 0$ et un sous-groupe fini $G \subset S_d$, un entier $r > 0$ et r classes de conjugaison $C_1, \dots, C_r$ de G. Considérons les revêtements $f : X \to S = \mathbb{P}^1$ sur un corps de caractéristique 0 avec les invariants suivants :

– le groupe de monodromie (*cf.* n$^\mathrm{o}$ 2 de [**D-D-E**] pour la définition de ce dernier) de f est G et l'action de monodromie sur une fibre non ramifiée est donnée par le plongement $G \subset S_d$ ($d = \deg f$)

– le nombre de points de ramification est r.

– la famille des classes de conjugaison dans G des générateurs distingués des groupes d'inertie au-dessus des points de ramification est $\underline{C} = \{C_1, \dots, C_r\}$.

Soient $H_G(\underline{C})$ l'espace des revêtements du type précédent (*cf.* n$^\mathrm{o}$ 3 de [**D-D-E**]). $H_G(\underline{C})$ est le schéma des modules grossiers d'un champ $\mathcal{H}_G(\underline{C})$ défini comme suit : soit T un Q-schéma, un T-objet de $\mathcal{H}_G(\underline{C})$ est un T-morphisme $f : X \to \mathbb{P}^1$ qui est fini et localement libre et tel que pour chaque point $\xi : \operatorname{Spec} k \to T$, $f_\xi : X_\xi \to \mathbb{P}^1_\xi$ est un revêtement du type précédent.

Le genre d'un objet de $\mathcal{H}_G(\underline{C})$ est parfaitement déterminé, d'où un foncteur oubli

$$\mathcal{H}_G(\underline{C}) \longrightarrow \mathrm{Cov}^{d,g}.$$

$\mathcal{H}_G(\underline{C})$ est un champ (algébrique sur $Z[\frac{1}{|G|}]$, *cf.* Chapitre IV de [**W**]) dont $\mathcal{G}(\overline{f})$ est la gerbe résiduelle en $\operatorname{Spec}(K[\overline{f}]) \in H_G(\underline{C})$ où $K[\overline{f}]$ désigne le corps des modules de $\overline{f}$ (*cf.* [**D-D.2**] et le théorème 11.5 de [**L-M.B**]). (Voir ci-dessous pour la définition d'une gerbe).

En fait $\mathcal{H}_G(\underline{C}) \to H_G(\underline{C})$ est une $H_G(\underline{C})$-gerbe étale localement liée par le centralisateur C de G dans S_d (*cf.* le paragraphe 4) [**D-D-E**].

Soit $S \in \mathrm{ob}(B)$, on dira aussi S-champ pour (B/S)-champ.

Définition. — Une S-gerbe est un S-champ $\mathcal{G}$ satisfaisant en plus aux deux conditions suivantes : pour tout S-objet T de B

– deux objets de la catégorie fibre $\mathcal{G}_T$ sont localement isomorphes,

– il existe un raffinement R de T tel que pour tout $U \in \mathrm{ob}(R)$, la catégorie fibre $\mathcal{G}_U$ est non vide.

Exemple. — Le $K_{\text{ét}}$-champ $\mathcal{G}(\overline{f})$ de l'exemple 3) est en fait une $K_{\text{ét}}$-gerbe.

2. Corps des modules – Cas des G-revêtements avec G abélien : la suite spectrale de descente

Reprenons la situation de l'exemple 3 du § 1. Soient S une K-variété régulière, projective, géométriquement irréductible où K est un corps, G un K-groupe fini constant, $\overline{f}$ un G-revêtement de S *a priori* seulement défini sur la clôture séparable $\overline{K}$ de K, $\overline{D}$ le lieu de ramification de $\overline{f}$. On supposera qu'il existe un K-diviseur D de S tel que $\overline{D} = D \otimes_K \overline{K}$. Posons $\overline{S} = S \otimes_K \overline{K}$, $S^* = S - D$, $\overline{S}^* = S^* \otimes_K \overline{K}$.