Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 133–146

MORPHISMES D'UNE COURBE DE GENRE 2 VERS UNE COURBE DE GENRE 1

par

Philippe Satgé

Résumé. — Un morphisme non constant d'une courbe de genre 2 vers une courbe de genre 1 admet, en général, plusieurs morphismes complémentaires. Nous proposons dans ce travail une manière canonique de choisir un tel complémentaire, et discutons quelques propriétés remarquables de ce complémentaire. Cette construction, dans le cas où le morphisme donné est de degré impair, est connue ; le cas du degré pair présente une difficulté supplémentaire.

***Abstract* (Morphisms from a cuve of genus two to a curve of genus one).** — There are several independant morphisms from a curve of genus 2 to some curve of genus 1 which are independant of a given morphism from the curve of genus 2 to a given curve of genus 1. In this paper, we describe a canonical choice, and point out some of its properties. This construction is known if the degree of the given morphism is odd; an extra difficulty comes up when this degree is even.

Introduction

On fixe un corps de base k de caractéristique différente de 2 et une clôture algébrique $\overline{k}$ de k ; on se donne une k-courbe C de genre 2 qui est k-hyperelliptique (c'est à dire telle que le quotient de C par l'involution hyperelliptique est k-isomorphe la droite projective $\mathbb{P}^1_k$) et on note ι_C l'involution hyperelliptique de C. On suppose qu'il existe un k-morphisme $\varphi : C \to E$ où E est une k-courbe elliptique qui vérifie $\varphi \circ \iota_C = -\varphi$ et qui est optimal, c'est à dire que le noyau du morphisme de la jacobienne de E vers la jacobienne de C déduit de φ par fonctorialité de Picard est le k-schéma en groupe trivial (on rappelle dans le § 1 de ce travail que, si φ est un k-morphisme optimal de C vers une k-courbe de genre 1, alors on peut canoniquement munir cette k-courbe de genre 1 d'une structure de k-courbe elliptique de sorte que $\varphi \circ \iota_C = -\varphi$). Dans cette situation, le théorème d'irréductibilité de Poincaré prouve qu'il existe au moins un $\overline{k}$-morphisme ψ de C vers une autre $\overline{k}$-courbe elliptique F qui est indépendant

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G27, 14H30.
Mots clefs. — Courbes de genre 1 et 2, jacobiennes, revêtements.

de φ (c'est à dire tel que, si ω et η sont respectivement des 1-formes régulières non nulles sur E et F, alors $\varphi^*(\omega)$ et $\psi^*(\eta)$ sont deux 1-formes régulières sur C qui sont linéairement indépendantes). Bien que le morphisme φ ne détermine pas toujours la courbe F de manière unique, le choix suivant est naturel : on prend pour F le quotient de la jacobienne de C par l'image du morphisme obtenu par dualité de Picard à partir de φ ; ainsi F est une courbe elliptique, définie sur k, naturellement associée au k-morphisme φ. Nous montrons dans ce travail qu'il existe un plongement de C dans sa jacobienne qui, composé avec la projection de cette jacobienne sur F, donne un morphisme $\psi : C \to F$ qui possède les propriétés suivantes : ψ est un morphisme indépendant de φ, est défini sur k, vérifie $\psi \circ \iota_C = -\psi$, est optimal, son degré est égal au degré de φ ; ce morphisme ψ est appelé le complémentaire de φ ; le complémentaire de ψ est φ. On établit aussi une propriété caractéristique de ψ qui justifie les choix intervenant dans notre construction de ψ. Comme on l'a déjà signalé, on devra traiter de manière légèrement différente le cas où le degré de φ est impair et le cas où ce degré est pair. Le cas du degré impair est plus immédiat du fait qu'il y a alors un k-plongement naturel de C dans sa jacobienne ([**Kuh**], § 4 par exemple) ; par contre, lorsque le degré de φ est pair, un tel k-plongement n'existe plus en général ; la question de savoir si un morphisme complémentaire défini sur k existe toujours est soulevée à la fin du § 2 de [**Kuh**].

Le cas du degré 2 est le plus connu : un k-morphismes de degré 2 d'une courbe C de genre 2 vers une courbe de genre 1 est une projection de C sur le quotient C/τ où τ est une k-involutions non hyperelliptique de C. Comme on le rappelle dans le premier paragraphe de ce travail, le quotient C/τ est naturellement muni d'une structure de k-courbe elliptique pour laquelle la projection canonique $\varphi : C \to C/\tau$ est définie sur k, vérifie $\varphi \circ \iota_C = -\varphi$, et est optimale. En composant τ avec l'involution hyperelliptique de C, on obtient naturellement une autre k-involution non hyperelliptique $\tau' = \tau \circ \iota_C$ de C. Il est immédiat de vérifier que le morphisme complémentaire (que nous définissons dans ce travail) de la projection canonique $\varphi : C \to C/\tau$ est la projection canonique $\psi : C \to C/\tau'$. Lorsque k est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on retrouve les formules de réductions d'intégrales hyperelliptique de genre 2 à des intégrales elliptiques à l'aide de transformations de degré 2 qui ont été données par Jacobi et Legendre ([**Jac**], [**Leg**]) dans la première moitié du XIX-ème siècle. Notons que Jacobi et Legendre travaillent, comme c'était l'habitude au XIX-ème siècle, avec la courbe de genre 2 donnée sous forme de de Rosenhain (c'est à dire sous la forme de la courbe plane d'équation $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$). Un tel modèle n'est bien sûr pas adapté aux questions de rationalité puisque une k-courbe de genre 2 possédant une k-involution non hyperelliptique ne possède pas, en général, trois points de Weierstrass définis sur le corps k. Signalons que Gaudry et Schost ([**G-S**]) ont caractérisé, en terme de leurs invariants d'Igusa, les courbes de genre 2 possédant des involutions non hyperelliptiques et donné, pour chaque involution non hyperelliptique τ d'une telle courbe C , une équation quadratique dont les solutions sont les invariants modulaires de C/τ et C/τ'.

Toujours lorsque k est le corps $\mathbb{C}$ des complexes, le cas où le morphisme φ est de degré 3 a été aussi essentiellement traité au XIX-ème siècle dans la recherche de la réduction d'intégrales hyperelliptique de genre 2 à des intégrales elliptiques à l'aide de transformations de degré 3 . Krazer ([**Kra**], p. 480 dans la réédition de Chelsea) exhibe un exemple générique de ce cas ; il fait explicitement la remarque que, contrairement à ce qui se passe dans le cas du degré 2, les formules des deux intégrales d'une courbe de genre 2 qu'il donne sous forme d'intégrales elliptiques ne semblent pas se déduire l'une de l'autre de manière explicite. Autrement dit, il signale que l'existence d'un morphisme complémentaire ne se lit pas directement sur les formules dont il dispose. La manière dont Kuhn retrouve ces formules illustre l'intérêt de l'approche algébrique du problème ([**Kuh**]).

À la fin du XIX-ème siècle, Bolza ([**Bol**]) donne des exemples de réduction d'intégrales hyperelliptique de genre 2 à des intégrales elliptiques à l'aide de transformations de degré 4. La vérification du fait que les formules intégrales proposées par Bolza sont bien celles du morphisme complémentaire que l'on introduit ici mériterait sans doute d'être rédigée (mais nécessite des calculs un peu long).

On notera enfin que le cas du degré 5 est traité (dans un point de vue un peu différent) par Rubin et Silverberg ([**R-S**]).

Nous utilisons dans ce travail des résultats bien connus que l'on trouve dans ([**F-K**] et [**Kuh**] par exemple). Nous les rappelons sans démonstration dans un premier paragraphe. Notons que la seule hypothèse que nous faisons est que le corps de base k est de caractéristique différente de 2 ; cette caractéristique peut diviser le degré du morphisme φ. En conséquence, nous utilisons le langage des k-schémas en groupes plutôt que celui des modules galoisiens (qui ne permet pas de traiter le cas où la caractéristique de k divise le degré du morphisme φ). Cela nous amène à présenter quelques remarques concernant la notion de morphisme optimal qui sont difficiles à trouver dans la littérature (nous les établissons en utilisant des notions traitées en exercices dans Bourbaki).

On utilisera de manière essentielle la théorie des jacobiennes des courbes. Bien qu'un grand nombre des résultats dont nous nous servons ont été établis par A. Weil ([**Wei**] complété par le postcriptum de l'édition de 1971 pour les questions de corps de rationalité), nous utilisons le point de vue introduit par Grothendieck, c'est à dire celui qui consiste à utiliser le foncteur de Picard relatif ([**Gro**], [**Mum**], [**B-L-R**]). Cela permet plus de souplesse dans les raisonnements, en particulier pour les questions de rationalité, et c'est le cadre naturel de la théorie de la dualité qui joue un rôle essentiel dans notre présentation (et qui ne s'exprime pas de manière agréable dans le point de vue de A. Weil). Les notations et les conventions que nous utilisons dans ce papier sont relativement standards. Cependant, elles mettent en jeu des identifications que nous précisons pour éviter les ambiguïtés. Si X est un k-schéma et si K/k est une extension de corps, un diviseur (resp. un faisceau, etc..) sur le K-schéma $X \times_k K$ sera simplement appelé un K-diviseur (resp. K-faisceau, etc..) sur X ; de même, si Y est un autre k-schéma, un K-morphisme $f : X \times_k K \to Y \times_k K$ sera simplement appelé un K-morphisme de X vers Y et noté $f : X \to Y$.

Si X est une k-courbe lisse et géométriquement intègre ou une k-variété abélienne, le foncteur de Picard relatif de X/k est représentable par un k-schéma en groupe localement algébrique dont la composante connexe de l'origine est une k-variété abélienne $\mathrm{Pic}^\circ_{X/k}$. Dans le cas où X est une courbe, $\mathrm{Pic}^\circ_{X/k}$ est appelée la jacobienne de X et représente le sous foncteur du foncteur de Picard relatif correspondant aux familles de faisceaux inversibles sur X qui sont de degré 0 ; on pose alors $J(X) := \mathrm{Pic}^\circ_{X/k}$. Les $\overline{k}$-points de $J(X)$ s'identifient aux classes d'isomorphismes de $\overline{k}$-faisceaux inversibles sur X qui sont de degré 0, donc aussi aux classes d'équivalence linéaire de $\overline{k}$-diviseurs de degré 0 sur X. Si Λ est un $\overline{k}$-diviseur de degré d sur X, on note $\alpha_\Lambda : X \to J(X)$ le $\overline{k}$-morphisme d'Abel-Jacobi associé à Λ, c'est à dire l'unique $\overline{k}$-morphisme de X vers $J(X)$ qui envoie un $\overline{k}$-point P de X sur le $\overline{k}$-point de $J(X)$ représenté la classe du $\overline{k}$-diviseur $dP - \Lambda$ (qui est de degré 0). Nous identifions toujours $\mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k}$ à $J(X)$ à l'aide de la polarisation principale de $J(X)$ (c'est à dire de la polarisation principale associée aux diviseurs theta). Rappelons qu'alors, si Λ est un $\overline{k}$-diviseur de X de degré d, le $\overline{k}$-morphisme $\alpha^\circ_\Lambda : J(X)\ (= \mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k}) \to J(X)$ obtenu, à partir du $\overline{k}$-morphisme $\alpha_\Lambda : X \to J(X)$ par dualité de Picard, est la multiplication par $-d$.

Dans le cas où X est une courbe de genre 1 munie d'un point rationnel 0_X, on sait que le morphisme d'Abel-Jacobi $\alpha_{0_X} : X \to J(X)$ est un k-isomorphisme de courbe, et un k-isomorphisme de variété abélienne si on munit X de la structure de k-variété abélienne pour laquelle 0_X est l'origine. Lorsqu'un tel point 0_X est fixé, on identifie X munie de cette structure de variété abélienne à $J(X)$ à l'aide de α_{0_X} ; le morphisme $\alpha^\circ_{0_X}$ est alors la multiplication par -1 de X ($= \mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k}$) vers X ($= J(X)$).

Si $f : X \to Y$ est un k-morphisme de la k-courbe X vers la k-courbe Y, on note $f^\circ : J(Y) \to J(X)$ le k-morphisme de variété abélienne déduit de f par fonctorialité de Picard. De nouveau par fonctorialité de Picard, et compte tenu de nos identifications de $\mathrm{Pic}^\circ_{J(X)/k}$ et $\mathrm{Pic}^\circ_{J(Y)/k}$ avec avec $J(X)$ et $J(Y)$, le k-morphisme f° donne par fonctorialité de Picard un k-morphisme $f^{\circ\circ} : J(X) \to J(Y)$. Rappelons que, sur les $\overline{k}$-points des jacobiennes identifiés aux classes de diviseurs de degré 0, f° correspond à l'image réciproque des diviseurs par f, et $f^{\circ\circ}$ correspond à l'image directe des diviseurs par f. On posera $Nf := f^{\circ\circ}$ comme c'est relativement habituel. Si f n'est pas constant, le composé $Nf \circ f^\circ$ est la multiplication par le degré de f comme on le vérifie sur les $\overline{k}$-points.

1. Notations et rappels

Nous utiliserons le vocabulaire suivant :

Définition 1.1. — Soient X et Y deux k-courbes lisses et géométriquement intègres ; on suppose que le genre de Y est strictement positif. Un k-morphisme $f : X \to Y$ est dit optimal si le noyau du k-morphisme $f^\circ : J(Y) \to J(X)$ est le k-schéma en groupe trivial.

Nous aurons besoin du lemme suivant qui est connu, mais dont la démonstration est difficile à trouver explicitement dans la littérature :

Lemme 1.2. — *Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, et soient X et Y deux k-courbes lisses et géométriquement intègres. On suppose que le genre de Y est strictement positif et que $f : X \to Y$ est un k-morphisme optimal, alors f est fini et séparable.*

Démonstration. — Si f n'est pas fini, il est constant et f° est l'application nulle, donc f n'est pas optimal.

Soit $\overline{f}$ le morphisme déduit de f par extension des scalaires à la clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Le noyau de $\overline{f}^\circ$ est le $\overline{k}$-groupe algébrique obtenu à partir du noyau de f par extension des scalaires à $\overline{k}$, donc f est optimal si et seulement si $\overline{f}$ est optimal. D'autre part, comme X et Y sont géométriquement intègres, l'extension $k(X)/k(Y)$ est séparable si et seulement si $\overline{k}(X)/\overline{k}(Y)$ est séparable. On peut donc, pour notre démonstration, supposer que k est algébriquement clos ; nous faisons cette hypothèse dans la suite de la démonstration. Désignons par $k(Y)^p$ le sous corps de $k(Y)$ formé des puissances $p^{ième}$ des éléments de $k(Y)$. Comme l'extension $k(Y)/k$ est un extension séparable, de type fini, et de degré de transcendance 1, l'extension $k(Y)/k(Y)^p$ est de degré p, c'est à dire que le degré d'imperfection de $k(Y)$ sur $k(Y)^p$ est égal à 1. Supposons que f n'est pas séparable, c'est à dire que l'extension de corps $k(X)/k(Y)$ n'est pas séparable ; on sait alors (exercice 15 du § 8 de [**Bou**]) qu'il existe un $x \in k(X)$ tel que $x^p \in k(Y)$ et $x \notin k(Y)$. L'extension $k(X)/k(Y)$ contient donc une extension intermédiaire qui est purement inséparable et de degré p sur $k(Y)$, et donc $f : X \to Y$ se factorise par un morphisme $g : Z \to Y$ qui est purement inséparable et de degré p. On sait ([**Har**], Chap.IV, Prop. 2.5 par exemple dont on reprend les notations) que cela implique que Z est isomorphe à Y_p et que g est le Frobenius k-linéaire ; comme le genre de Y est strictement positif, le noyau de g° n'est pas trivial, donc le noyau de f° n'est pas trivial non plus, et notre assertion est prouvée. □

Remarque. — Comme me l'ont fait remarquer plusieurs personnes (Edixhoven, Illusie et Katsura par exemple), on peut présenter la démonstration précédente de manière plus géométrique : on suppose toujours k algébriquement clôs, et on écrit la factorisation standard $f = h \circ j$ où $j : X \to T$ est purement inséparable et $h : T \to Y$ est séparable (correspondant à la décomposition standard de l'extension de corps $k(X)/k(Y)$ en une extension séparable suivie d'une extension purement inséparable). Notons p^n le degré de j ; comme on l'a rappelé dans la démonstration ci-dessus, on sait que X est isomorphe à T_{p^n} et que le k-morphisme j est obtenu par n applications successives du Frobenius k-linéaire (les notations sont celles de [**Har**], Chap.IV, Prop. 2.5). Le corps $k(X)$ est donc le corps obtenu en extrayant les racines p^n-ième des éléments de $k(T)$, donc $k(X)$ contient les racines p^n-ième des éléments de $k(Y)$, et