Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 43–61

UNE MINI INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE RIGIDE

par

Qing Liu

Résumé. — Ce texte a pour but de donner quelques notions de base de la géométrie analytique rigide, et d'expliquer les outils nécessaire pour comprendre l'interprétation analytique rigide de la preuve du théorème d'Harbater.

***Abstract* (A mini introduction to rigid analytic geometry).** — This short note aims to provide some basics on rigid analytic geometry, and to explain the tools we need to understand the rigid analytic proof of Harbater's theorem.

1. Introduction

Ce texte a pour but de donner quelques notions de base de la géométrie analytique rigide et d'entrevoir quelques applications. En particulier, on expliquera les outils et notions nécessaires pour comprendre l'interprétation analytique rigide de la preuve du théorème d'Harbater ([**Har**], voir aussi [**Li**]) :

> *Tout groupe fini est le groupe de Galois d'un revêtement de courbes algébriques $C \to \mathbb{P}^1_K$ pour tout corps complet non-archimédien K, avec C projective lisse et géométriquement connexe sur K.*

Voir plus particulièrement les corollaires 4.16 et 5.10.

On fixera dans toute la suite un corps K muni d'une valeur absolue non-archimédienne $|.|$ et qui est complet pour la topologie définie par cette valeur absolue. Les exemples les plus courants sont $\mathbb{Q}_p$ le corps de nombres p-adiques, ou le corps de séries formelles $k((T))$ à coefficients dans un corps k. L'idée de la géométrie analytique rigide est d'étudier des variétés algébriques en tirant profit de la valeur absolue. C'est en quelque sorte l'analogue de la géométrie analytique complexe, mais avec des aspects beaucoup plus algébriques. Le premier succès de la théorie est sans doute la théorie d'uniformisation des courbes de Tate. Nous n'aborderons

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14G22, 14H30.
Mots clefs. — Fonctions implicites, revêtement de la droite projective, GAGA.

malheureusement pas cet aspect de la théorie par manque de temps. De même, le point de vue schémas formels à la Raynaud et la théorie de Berkovich sont passés sous silence.

Tous les résultats exposés ici sont classiques et bien connus, même si leurs preuves sont parfois difficiles à trouver dans la littérature. Dans le paragraphe 2, nous donnons les premières propriétés des algèbres affinoïdes et des parties rationnelles des espaces affinoïdes. En suite, la définition générale des espaces analytiques rigides est présentée au paragraphe 3. Le paragraphe 4 est consacré à l'étude locale du faisceau structural $\mathcal{O}_X$. On y démontre notamment le théorème des fonctions implicites (théorème 4.3) et le fait que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien (proposition 4.8). L'illustration géométrique de cette dernière propriété est donnée par le corollaire 4.11. Enfin, on présente brièvement la preuve du principe GAGA (théorème 5.7) au dernier paragraphe. La plupart des énoncés des paragraphes 2 et 3 sont donnés sans démonstration. Nous encourageons le lecteur à consulter les ouvrages de base en géométrie analytique rigide ([**BGR**], [**FV**], [**Fr**]).

J'adresse mes remerciements aux organisateurs du colloque, et au referee pour sa lecture attentive du manuscrit.

2. Fonctions analytiques rigides

Soit K un corps complet non-archimédien. Toute extension algébrique L de$K$ possède un unique prolongement de la valeur absolue de K. Soit $n \geqslant 1$. On notera $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ le polydisque (fermé) unité de dimension n. Plus précisément,

$$\mathbb{D}^n(\overline{K}) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{K}^n \mid |z_i| \leqslant 1, \forall\, i\ \}.$$

Cet ensemble est muni naturellement d'une topologie induite par la valeur absolue sur $\overline{K}$. Il faut noter que du fait que la valeur absolue est non archimédienne, la topologie est totalement discontinue sur $\mathbb{D}^n(\overline{K})$.

Comment définir les fonctions analytiques sur $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ (ou un ouvert quelconque de $\mathbb{D}^n(\overline{K})$) ? La première idée qui vient à l'esprit est de prendre les fonctions continues et localement développables en séries entières. Si cette approche est utile pour d'autres propos (par exemples pour les équations différentielles p-adiques ou les fonctions L p-adiques), elle n'est pas adaptée à une étude algébrique. Il y a en effet trop de fonctions analytiques dans ce sens (toute fonction caractéristique d'un disque contenu dans $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ est analytique dans ce sens). Une définition plus adaptée à l'étude géométrique est apparues au début des années soixante dans un texte de J. Tate [**Ta**].

Définition 2.1. — On appelle *algèbre de Tate* à n variables le sous-ensemble de l'ensemble des séries formelles

$$K\langle T_1, \dots, T_n\rangle := \left\{ f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu T^\nu \in K[[T_1, \dots, T_n]] \;\middle|\; \lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 0 \right\}.$$

Ce sont les séries formelles qui convergent sur $\mathbb{D}^n(\overline{K})$. Cette K-algèbre est munie d'une norme

$$\|f\| = \max_{\nu} |a_\nu|$$

qui fait clairement de $K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ une K-algèbre de Banach. Remarquons que l'on peut définir de la même façon $A\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ pour toute algèbre de Banach A.

Théorème 2.2. — *Soit $n \geqslant 1$. Notons $T^n = K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$. Les propriétés suivantes sont vraies.*
(a) *L'algèbre T^n est noethérienne, factorielle, de dimension de Krull n. Tout idéal de T^n est fermé.*
(b) *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de T^n, le corps $T^n/\mathfrak{m}$ est fini sur K.*
(c) *Pour tout idéal I de T^n, on a $\sqrt{I} = \cap_{\mathfrak{m}\in V(I)}\mathfrak{m}$, où $V(I)$ est l'ensemble des idéaux maximaux de T^n contenant I.*

Les ingrédients principaux pour la preuve du théorème sont le théorème de préparation et de division de Weierstrass dans T^n. Comme cas particulier de ces théorèmes, toute fonction $f(T) \in K\langle T\rangle$ se décompose de façon unique sous la forme

$$f(T) = P(T)(1 + Tg(T)), \quad P(T) \in K[T],\ g(T) \in K\langle T\rangle.$$

Ainsi, l'ensemble des zéros de f est fini dans $\mathbb{D}^1(\overline{K})$. Pour tout anneau A, notons $\mathrm{Spm}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A et $\mathbb{D}^n_K = \mathrm{Spm}(T^n)$.

Corollaire 2.3. — *Si K est algébriquement clos, alors $\mathrm{Spm}(T^n) = \mathbb{D}^n(\overline{K})$. Pour tout idéal I de T^n, on a $\mathrm{Spm}(T^n/I) = Z(I)$, où $Z(I)$ est l'ensemble des zéros communs des fonctions $f \in I$.*

C'est l'équivalent du théorème des zéros (Nullstellensatz) de Hilbert. Lorsque K n'est plus nécessairement algébriquement clos, la propriété (c) du théorème 2.2 montre que l'on peut considérer les points de $\mathbb{D}^n_K$ comme des orbites de $\mathbb{D}^n(\overline{K})$ sous l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. En particulier, on peut munir $\mathbb{D}^n_K$ de la topologie la plus fine qui rende la projection $\pi : \mathbb{D}^n(\overline{K}) \to \mathbb{D}^n_K$ continue. Pour tout idéal I de T^n, on a $\pi^{-1}(V(I)) = Z(I)$. Cela induit donc une topologie sur $V(I)$. L'inclusion $V(I) \to \mathbb{D}^n_K$ est une immersion fermée.

Définition 2.4. — Une *algèbre affinoïde* (sur K) est une K-algèbre A telle qu'il existe un homomorphisme surjectif de K-algèbres $T^n \to A$. Comme l'idéal $I := \mathrm{Ker}(T^n \to A)$ est fermé, A hérite d'une norme quotiente pour laquelle elle est complète. Notons $X = \mathrm{Spm}(A)$ qui s'identifie à $V(I)$. La topologie sur X décrite comme ci-dessus est appelée la topologie canonique de X. On peut montrer qu'elle est indépendante du choix de la présentation A sous la forme T^n/I.

Pour tout $x \in X$, on note $k(x)$ le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A correspondant à x). C'est une extension finie de K, et elle est donc munie d'une unique valeur absolue qui prolonge celle de K. Soit $f \in A$. On note $f(x)$ l'image de

f dans $k(x)$. Ainsi on peut considérer f comme une fonction $X \to \overline{K}$. Les éléments de A seront appelés *fonctions analytiques sur* X. On pose

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \sup\{x \in X \mid |f(x)|\}$$

C'est la *semi-norme spectrale* sur A. C'est une norme si et seulement si A est réduite. On note usuellement

$$A^0 = \{f \in A \mid \|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant 1\}, \quad A^{00} = \{f \in A \mid \|f\|_{\mathrm{sp}} < 1\}, \tag{1}$$

Ainsi K^0 est l'anneau de valuation de K et K^{00} est l'idéal maximal de K^0. On voit que A^0 est un sous-K^0-anneau de A, et A^{00} est un idéal de A^0.

La définition de fonctions analytiques peut se transmettre à certains ouverts de X. Soit $(\boldsymbol{f}) = (f_0, \ldots, f_m)$ une famille ordonnée de fonctions analytiques sur X, sans zéro commun (ce qui équivaut à $A = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m} f_i A$), on pose

$$R(\boldsymbol{f}) = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leqslant |f_0(x)|, \ i = 0, 1, .., m \ \}.$$

Du fait que la valeur absolue sur K est non-archimédienne, $R(\boldsymbol{f})$ est une partie ouverte de X, que l'on appelle une *partie rationnelle de* X. L'homomorphisme canonique de A dans

$$B := A\langle S_1, \ldots, S_m\rangle/(S_1 f_0 - f_1, \ldots, S_m f_0 - f_m)$$

induit (grâce au théorème 2.2 (c)) une application $\mathrm{Spm}(B) \to X$. On peut vérifier que cette application est injective et que son image est $R(\boldsymbol{f})$. Donc une partie rationnelle de X est encore le Spm d'une algèbre affinoïde.

Exemple 2.5. — Soit $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in K^*$. Alors

$$D(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{r}) := \{x \in \mathbb{D}^n_K \mid |T_i(x)| \leqslant |r_i|, \ i = 1, \ldots, n\},$$

le disque centré en 0 de rayon $\boldsymbol{r}$, est une partie rationnelle de $\mathbb{D}^n_K$. Il suffit de prendre $f_0 = 1$ et $f_i = T_i/r_i$.

Remarque 2.6. — Soient $(\boldsymbol{f}) = (f_0, \ldots, f_m)$, $(\boldsymbol{g}) = (g_0, \ldots, g_k)$ deux familles de fonctions analytiques sur X, chacune étant sans zéro commun sur X. Posons $(\boldsymbol{h}) = (f_i g_j)_{i,j}$ avec $h_0 = f_0 g_0$. Alors on montre facilement que $R(\boldsymbol{f}) \cap R(\boldsymbol{g}) = R(\boldsymbol{h})$ et que la réunion de deux parties rationnelles disjointes est une partie rationnelle.

Exemple 2.7. — Pour tout $a \in K$ et $r \in K^*$, on note $D(a, r)$ la partie rationnelle de $\mathbb{D}^1_K$ correspondante à $\{r, T - a\}$. Donc $D(a, r) = \mathrm{Spm}(K\langle r^{-1}(T - a)\rangle)$. Vue dans $\overline{K}$, cette partie correspond au disque fermé

$$D(a, r) = \{z \in \overline{K} \mid |z - a| \leqslant r\}.$$

Soient $a_1, \ldots, a_m \in K$, $r_1, \ldots, r_m \in K^*$ tels que $|a_i|, |r_i| \leqslant 1$, et $|a_i - a_j| > |r_i|$ si $i \neq j$. Alors le « *disque troué* » (voir la figure 1)

$$\{z \in \overline{K} \mid |z| \leqslant 1, |z - a_i| \geqslant |r_i|, i = 1, \ldots, m\}$$

est une partie rationnelle de $\mathbb{D}^1_K$, puisque c'est l'intersection des parties rationnelles $R(\{T - a_i, r_i\})$. Si K est algébriquement clos, on peut montrer que toute partie rationnelle de $\mathbb{D}^1_K$ est de cette forme.

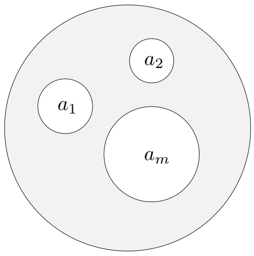

FIGURE 1

Remarque 2.8. — Il est facile de montrer à l'aide de l'exemple 2.5 que l'ensemble des parties rationnelles de X forment une base d'ouverts pour la topologie canonique.

3. Espaces analytiques rigides

L'idée de la géométrie analytique rigide est de définir les fonctions analytiques que sur des ouverts particuliers.

Définition 3.1. — Soit X un espace topologique. On appelle *topologie de Grothendieck sur* X la donnée d'une famille d'ouverts de X (*ouverts admissibles*) et d'une famille de recouvrements $\mathcal{C}ov(U)$ (*recouvrements admissibles*) pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ satisfaisant les propriétés suivantes
(1) Les parties $X, \varnothing$ sont admissibles. L'intersection de deux ouverts admissibles est admissible.
(2) Fixons un ouvert admissible U. Alors
 (2.1) $\{U\} \in \mathcal{C}ov(U)$;
 (2.2) Pour tout recouvrement admissible $\{U_i\}_i$ de U et pour tout ouvert admissible V, contenu dans U, la famille $\{V \cap U_i\}_i$ est un recouvrement admissible de V ;
 (2.3) Soit $\{U_i\}_i$ comme ci-dessus. Soit $\{U_{ij}\}_j$ un recouvrement admissible de U_i. Alors $\{U_{ij}\}_{i,j}$ est un recouvrement admissible de U.

Exemple 3.2. — Soit A une algèbre affinoïde, soit $X = \mathrm{Spm}(A)$ muni de la topologie canonique. On définit une topologie de Grothendieck sur X en prenant comme ouverts admissibles les parties rationnelles, et comme recouvrements admissibles les recouvrements dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. Notons que l'on peut être amené à définir une topologie de Grothendieck avec plus d'ouverts admissibles (voir