Séminaires & Congrès
7, 2003, p. 1–43

COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE ET THÉORÈME DE STOKES

par

Michèle Vergne
(rédigé par Sylvie Paycha)

Résumé. — Nous donnons une introduction à la cohomologie équivariante d'une variété. Dans le cas de l'action d'un cercle avec points fixes isolés, nous décrivons, après localisation, la cohomologie équivariante d'une variété en fonction des points fixes grâce à la formule de Paradan. Comme conséquence, nous redémontrons la formule de localisation d'Atiyah-Bott-Berline-Vergne.

***Abstract* (Equivariant cohomology and Stokes Theorem).** — In this text, we give an introduction to equivariant cohomology of a manifold. In the case of an S^1-action with isolated fixed points, we describe, after localization, the equivariant cohomology of a manifold in terms of fixed points with the help of Paradan's formula. As a consequence, we give a simple proof of the localization formula of Atiyah-Bott-Berline-Vergne.

1. Introduction

Commençons par l'exemple de l'action du cercle sur une sphère de rayon r. Soit

$$S_2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Considérons la rotation autour de l'axe des z. La fonction hauteur correspondant à la coordonnée z reste invariante par cette action.

Soit u un nombre réel. Le changement de variable

$$\big(\varphi, r, z\big) \longmapsto \big(x = \sqrt{r^2 - z^2}\,\cos\varphi,\ y = \sqrt{r^2 - z^2}\,\sin\varphi,\ z\big)$$

permet de calculer

$$\int_{S_2(r)} e^{uz} d\sigma = (2\pi r)\Big(\frac{e^{ur} - e^{-ur}}{u}\Big)$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface qui s'écrit $d\sigma = r d\varphi dz$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 53D50, 55N91, 19L10.
Mots clefs. — Cohomologie, équivariant, points fixes, classe d'Euler.

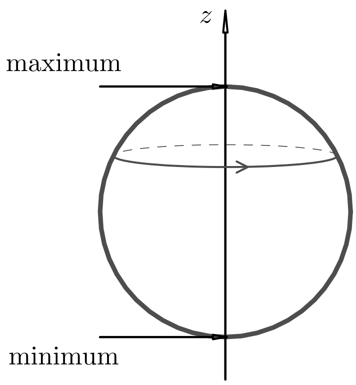

FIGURE 1

On remarque que $\lim_{u\to 0}\int_{S_2(r)} e^{uz}d\sigma = 4\pi r^2$ ce qui correspond à l'aire de $S_2(r)$. De plus $e^{\pm ur}$ correspondent aux extrema sur $S_2(r)$ de la fonction e^{uz}.

Cet exemple simple de calcul d'une intégrale illustre dans un cas très particulier la formule de la phase stationnaire exacte démontrée par Duistermaat et Heckman [**DH**]. Simultanément, Berline et Vergne [**BV**], Witten [**W1**] et Atiyah et Bott [**AB**] au début des années 80 ont expliqué cette formule de phase stationnaire exacte grâce à la cohomologie équivariante d'une variété.

Le calcul de Duistermaat-Heckman s'applique au cas de l'action du cercle sur une variété symplectique M compacte de dimension $n = 2\ell$, l'action étant supposée hamiltonienne, c'est à dire la forme symplectique est invariante par l'action du cercle et il existe une primitive f de la 1-forme ω définie par $\omega(\cdot) := \Omega(J,\cdot)$ si Ω désigne la forme symplectique, $-J$ le champ de vecteurs engendré par les rotations du cercle. On a alors, dans le cas où les points critiques de f sont isolés,

$$\int_M e^{uf}d\beta = (-2\pi)^\ell \sum_{\{p,\ \text{points critiques de } f\}} \frac{e^{uf(p)}}{u^\ell \det(\mathrm{Hess}_p f)^{1/2}}, \tag{1}$$

où $d\beta := \Omega^\ell/\ell!$ est la mesure de Liouville. On explicitera le calcul d'une racine carrée particulière de $\det(\mathrm{Hess}_p f)$ utilisant l'orientation canonique de T_pM.

Le volume symplectique de M (souvent difficile à calculer) s'obtient comme limite quand u tend vers 0 de cette intégrale.

Remarques

(1) Un autre cas important de la formule de la phase stationnaire exacte est le calcul de gaussiennes du type :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-u(x_1^2+x_2^2)/2}dx_1dx_2 = \frac{2\pi}{u}.$$

(2) Le terme « exact » dans le nom de cette formule provient de l'absence de terme « d'erreur » auquel on pourrait « *a priori* » s'attendre dans le calcul de $\int_M e^{uf}\Omega^\ell/\ell!$ lorsque $u := it$ et t tend vers l'infini.

L'outil de la cohomologie équivariante introduit par N. Berline et M. Vergne et, indépendamment, par Witten, Atiyah et Bott s'est avéré très utile pour établir la formule de la phase stationnaire exacte et d'autres formules plus générales du même type. On peut déjà trouver l'idée de base de la cohomologie équivariante sous une forme algébrique dans des travaux de H. Cartan [**C**].

La cohomologie équivariante est une généralisation de la cohomologie de de Rham. Si l'on considère comme précédemment l'action d'un cercle sur la variété M, l'algèbre $\mathscr{A}(M)$ des formes différentielles sur M de la cohomologie de de Rham est remplacée par le produit tensoriel $\mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}(M)^J$ de l'algèbre $\mathbb{C}[u]$ des polynômes en la variable u et de l'algèbre $\mathscr{A}(M)^J$ des formes invariantes par l'action du cercle engendrée par le champ de vecteurs $-J$, qui s'écrit aussi

$$\mathscr{A}(M)^J := \{\alpha \in \mathscr{A}(M) \mid \mathscr{L}(J)\alpha = 0\}$$

où $\mathscr{L}(J)$ est la dérivée de Lie dans la direction de J.

L'opérateur de différentiation $d : \mathscr{A}(M) \to \mathscr{A}(M)$ de la cohomologie de de Rham est remplacé par l'opérateur $D := d - u\, i(J) : \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J \to \mathbb{C}[u] \otimes \mathscr{A}(M)^J$ où $i(J)$ désigne l'opérateur de contraction avec le champ de vecteurs J.

De même que la relation $d^2 = 0$ permet de définir la cohomologie de de Rham, la relation $D^2 = 0$ permet de définir une cohomologie appelée cohomologie équivariante de M (associée à l'action de S^1).

Si $u = 0$, on retrouve bien sûr la cohomologie de de Rham car le complexe des formes invariantes par le groupe compact S^1 a même cohomologie que le complexe de de Rham.

Le cours qui suit présentera un calcul explicite de la cohomologie équivariante dans le cas de l'action du cercle sur lui-même, puis du cercle sur $\mathbb{R}^2$ et enfin du cercle sur un espace vectoriel de dimension finie quelconque. Puis on démontrera la formule de localisation en cohomologie équivariante dans le cas de points fixes isolés, ainsi que le théorème de localisation de Borel.

On trouvera une introduction à la cohomologie équivariante dans [**BGV**, chap. 7], [**AB**], [**MQ**].

Le théorème de localisation (voir th. 7.11 dans [**BGV**]) permet d'exprimer l'intégrale d'une forme équivariante fermée $\alpha(u) \in \mathbb{C}[u]\otimes\mathscr{A}(M)^J$ sur une variété compacte orientée comme somme (finie) sur l'ensemble des zéros du champ J (pourvu que ceux-ci soient isolés) ou plus généralement (voir th. 7.13 dans [**BGV**]) comme intégrale de la restriction de $\alpha(u)$ à la variété des zéros du champ J. On considère donc une forme différentielle $\alpha(u) := \sum_k \alpha^{[k]}(u)$ *inhomogène*, dépendant polynomialement de u et vérifiant l'équation

$$d\alpha(u) = u\, i(J)\alpha(u).$$

Le terme $\alpha^{[0]}(u)$ est une fonction sur M (dépendant polynomialement de u), tandis que le terme $\alpha^{[n]}(u)$ est une n-forme (dépendant polynomialement de u).

Dans le cas de zéros isolés, on a :

$$\int_M \alpha(u) = (-2\pi)^{n/2} \sum_{\{p\in M \mid J_p=0\}} \frac{i_p^*\alpha(u)}{u^{n/2}\det^{1/2}(\mathscr{L}(J)_p)}$$

où n est la dimension de M, $i_p^*\alpha(u) := \alpha^{[0]}(u)(p)$ est l'évaluation de la composante de degré zéro de $\alpha(u)$ en p, l'intégrale $\int_M \alpha(u)$ devant être comprise comme intégrale de la partie de degré extérieur maximal $\alpha^{[n]}(u)$ de $\alpha(u)$. L'action donnée par le crochet de Lie $\mathscr{L}(J)\xi := [J,\xi]$ sur les champs de vecteurs induit une transformation $\mathscr{L}(J)_p$ de T_pM en chaque point $p\in M$ où J s'annule. Le point p étant isolé, cette transformation est inversible. La transformation $\mathscr{L}(J)_p$, étant la dérivée de Lie d'une rotation, a des valeurs propres imaginaires. Ainsi la dimension de M est-elle paire et on l'écrira $n=2\ell$. On peut représenter $\mathscr{L}(J)_p$ dans une base orientée de T_pM par la matrice

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1(p) \\ a_1(p) & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -a_\ell(p) \\ a_\ell(p) & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

et définir la racine de son déterminant $\det^{1/2}(\mathscr{L}(J))_p := a_1(p)\cdots a_\ell(p)$ sans ambiguïté sur le signe de la racine, compte-tenu de l'orientation de la variété. Les nombres réels $a_i(p)$ sont tous non nuls. La formule de localisation s'écrit alors

$$\int_M \alpha(u) = \Big(\frac{-2\pi}{u}\Big)^\ell \sum_{\{p\in M \mid J_p=0\}} \frac{\alpha^{[0]}(u)(p)}{a_1(p)\cdots a_\ell(p)}.$$

On peut naturellement appliquer la formule de localisation à des formes $\alpha(u)\in \mathbb{C}[[u]]\otimes \mathscr{A}(M)^J$ car l'anneau de cohomologie équivariante est $\mathbb{Z}$-gradué en posant $\deg u = 2$.

On retrouve la formule de Duistermaat-Heckman en appliquant le théorème de localisation à la forme

$$\alpha(u) := e^{(uf+\Omega)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(uf+\Omega)^k}{k!}$$

où Ω est la forme symplectique sur la variété et f la fonction hamiltonienne associée au champ de vecteurs J définie par $df = i(J)\Omega$. Du fait que la forme symplectique est fermée et que $i(J)f=0$, on déduit que $(d-ui(J))(uf+\Omega)=0$, puis par passage à l'exponentielle $D\alpha(u) = (d-u\,i(J))\alpha(u) = 0$.

La composante de degré extérieur maximal de $\alpha(u) = e^{uf}\left(1 + \Omega + \cdots + \frac{\Omega^\ell}{\ell!}\right)$ est $\left(e^{uf}\frac{\Omega^\ell}{\ell!}\right)$, tandis que la composante $\alpha^{[0]}(u)$ de degré extérieur 0 de $\alpha(u)$ est la fonction e^{uf}. La formule de localisation s'écrit :

$$\int_M e^{uf}\frac{\Omega^\ell}{\ell!} = (-2\pi)^\ell \sum_{\{p\in M \mid J_p=0\}} \frac{e^{uf(p)}}{u^\ell a_1(p)\cdots a_\ell(p)}.$$

On remarque que les points critiques de f correspondent aux zéros de J. En effet on a $df(p) = 0 \iff (i(J)\Omega)(p) = 0 \iff \Omega_p(J,.) = 0 \iff J_p = 0$ puisque Ω est non dégénérée.

On retrouve donc la formule de Duistermaat-Heckman (1)

$$\int_M e^{uf}\frac{\Omega^\ell}{\ell!} = (-2\pi)^\ell \sum_{\{p,\ \text{points critiques de } f\}} \frac{e^{uf(p)}}{u^\ell\ \det^{1/2}(\mathrm{Hess}_p f)}$$

car il existe un système de coordonnées locales au voisinage de p où le champ J est linéarisé :

$$\begin{aligned}
J &= a_1(p)\Big(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\Big) + \cdots + a_\ell(p)\Big(x_{2\ell}\frac{\partial}{\partial x_{2\ell-1}} - x_{2\ell-1}\frac{\partial}{\partial x_{2\ell}}\Big),\\
f &= \frac{1}{2}(a_1(p)(x_1^2 + x_2^2) + \cdots + a_\ell(p)(x_{2\ell-1}^2 + x_{2\ell}^2)),\\
\Omega &= dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2\ell-1} \wedge dx_{2\ell}.
\end{aligned}$$

Ces données vérifient effectivement la relation $df = i(J)\Omega$ et on a

$$\mathrm{Hess}_p f = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(p) & 0 \\ 0 & a_1(p) \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} a_\ell(p) & 0 \\ 0 & a_\ell(p) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons vu au début de cette introduction, une application de la formule de Duistermaat-Heckman est le calcul du volume d'une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne d'un groupe compact. Paradoxalement, cette formule peut aussi être utile pour calculer des volumes de variétés quotient pour l'action d'un groupe (sur lesquelles il n'y a donc plus d'action de groupe) comme dans le cas de l'espace des modules de connexions de Yang-Mills obtenues en quotientant l'espace des connexions de Yang-Mills par l'action du groupe de jauge. Ceci fait intervenir des intégrales sur l'espace des connexions qui est de dimension infinie et utilise une extension formelle de la formule de localisation au cadre de la dimension infinie [**W2**]. Grâce à l'outil des réductions symplectiques, on peut replacer le calcul dans le cadre de la dimension finie [**JK**].