Séminaires & Congrès
7, 2003, p. 101–167

ESPACES HILBERTIENS INVARIANTS DE FONCTIONS HOLOMORPHES

par

Jacques Faraut

Résumé. — Lorsqu'un espace hilbertien de fonctions holomorphes est invariant par un groupe d'automorphismes, la théorie des représentations permet de l'analyser et, dans certains cas, de déterminer son noyau reproduisant. La méthode d'analyse que nous présentons utilise la théorie de Choquet sur la représentation intégrale dans les cônes convexes. Nous considérons en particulier le cas des espaces hilbertiens de fonctions holomorphes sur un domaine invariant dans la complexification d'un espace symétrique compact.

***Abstract* (Spaces of holomorphic functions).** — When a Hilbert space of holomorphic functions is invariant under a group of automorphisms, representation theory can be used for analyzing it, and, in some cases, for computing its reproducing kernel. The method we are presenting uses Choquet theory of integral representation in convex cones. We consider in particular Hilbert spaces of holomorphic functions on the complexification of a compact symmetric space.

Un espace hilbertien de fonctions holomorphes sur une variété complexe Z est un sous-espace $\mathscr{H}$ de l'espace $\mathscr{O}(Z)$ des fonctions holomorphes sur Z muni d'une structure hilbertienne telle que l'injection de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{O}(Z)$ soit continue, l'espace $\mathscr{O}(Z)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On considère un groupe G d'automorphismes holomorphes de Z. Si l'espace hilbertien $\mathscr{H}$ est invariant par G, l'action de G dans $\mathscr{H}$ définit une représentation unitaire de G. La théorie des représentations permet d'analyser un tel espace et, dans certains cas, de déterminer son noyau reproduisant. La méthode d'analyse que nous présentons utilise la théorie de Choquet sur la représentation intégrale dans les cônes convexes, plus précisément une version récente due à E. Thomas. En effet l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de $\mathscr{O}(Z)$ qui sont invariants par G peut être muni d'une structure de cône convexe, et les génératrices extrémales de ce cône correspondent aux sous-espaces hilbertiens invariants irréductibles. Cette structure de cône s'explique facilement en associant à tout sous-espace hilbertien son noyau reproduisant. On peut formuler une

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32M05, 43A90, 53C35.
Mots clefs. — Noyau reproduisant, espace symétrique, fonction sphérique.

condition géométrique simple qui assure que tout sous-espace hilbertien invariant se décompose sans multiplicité. Il suffit pour cela qu'il existe une involution antiholomorphe τ de Z telle que, pour tout z de Z, z et $\tau(z)$ soient sur la même orbite de G.

Dans les deux derniers chapitres nous considérons le cas d'un domaine Ω dans la complexification d'un espace symétrique compact U/K, qui est invariant par U. Après avoir rappelé quelques résultats de base concernant la géométrie des espaces symétriques compacts et les représentations irréductibles sphériques, nous présentons les résultats de Lassalle sur les séries de Laurent généralisées. Nous verrons que, si $\mathscr{H}$ est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{O}(Z)$ qui est invariant par U, la représentation de U dans $\mathscr{H}$ se décompose sans multiplicité en somme directe de représentations irréductibles sphériques. Comme application nous montrons pour finir comment l'analyse de Fourier sphérique permet de donner une démonstration simple d'un résultat de Stenzel, généralisant un résultat antérieur de Hall. Il s'agit de montrer que l'image de $L^2(U/K)$ par la transformation de Bargmann-Segal est un espace de Bergman pondéré. Pour cela il suffit de montrer que ces deux sous-espaces hilbertiens de $\mathscr{O}(U_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}})$ ont le même noyau reproduisant.

CHAPITRE I
FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UN DOMAINE DE $\mathbb{C}^n$

Ce chapitre est un bref rappel des propriétés élémentaires des fonctions holomorphes de plusieurs variables, et de l'espace vectoriel topologique $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Dans la dernière section nous considérons les séries de Laurent de plusieurs variables. Les résultats qui y sont présentés seront généralisés dans le chapitre V où l'espace $(\mathbb{C}^*)^n$ sera remplacé par la complexification d'un espace symétrique compact.

I.1. Fonctions holomorphes sur un domaine de $\mathbb{C}^n$

Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^n$, et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dans Ω à valeurs complexes. On définit

$$D_w f(z) = \frac{d}{dt} f(z+tw)\big|_{t=0}.$$

À l'aide des coordonnées cela s'écrit, si $z_j = x_j + iy_j$, $w_j = u_j + iv_j$,

$$D_w = \sum_{j=1}^{n} \Big(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big).$$

Introduisons les notations
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big),$$
et, pour $w \in \mathbb{C}^n$,
$$\partial_w = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \overline{\partial}_w = \sum_{j=1}^n \overline{w}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}.$$
Alors D_w s'écrit
$$D_w = \partial_w + \overline{\partial}_w.$$
C'est la décomposition de D_w en sa partie $\mathbb{C}$-linéaire et sa partie $\mathbb{C}$-antilinéaire,
$$D_{iw} = i\partial_w - i\overline{\partial}_w.$$
La fonction f est dite *holomorphe* si
$$D_{iw}f = iD_w f \quad (w \in \mathbb{C}^n),$$
ce qui équivaut à dire que sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. Cela se traduit par $\overline{\partial}_w f = 0$, pour tout $w \in \mathbb{C}^n$, et aussi par
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$
Ce sont les *équations de Cauchy-Riemann*. La fonction f est dite *antiholomorphe* si
$$D_{iw}f = -iD_w f,$$
ou bien $\partial w f = 0$, et aussi
$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$
L'espace des fonction holomorphes dans un domaine Ω est noté $\mathscr{O}(\Omega)$. C'est une algèbre sur $\mathbb{C}$.

Une fonction f est dite *analytique* dans Ω si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point z^0 de Ω,
$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (z - z^0)^\alpha,$$
où
$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$
Une fonction analytique dans Ω est holomorphe dans Ω et
$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(z^0),$$
où
$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$
La formule de Cauchy permet d'établir la réciproque. Soit f une fonction holomorphe dans Ω, et soit $D_r(z^0)$ un polydisque de centre z^0 et de rayon r,
$$D_r(z^0) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w_j - z_j^0| < r\}$$

tel que $\overline{D_r(z^0)} \subset \Omega$. On note $\partial_0 D$ la frontière distinguée de $D = D_r(z^0)$,

$$\partial_0 D = \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w_j - z_j^0| = r\}.$$

Alors, pour $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(w_1, \ldots, w_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{w_j - z_j} dw_1 \cdots dw_n.$$

C'est la *formule de Cauchy pour un polydisque.* Par dérivation sous le signe intégrale on en déduit que

$$\partial^\alpha f(z) = \frac{\alpha!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(w_1, \ldots, w_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{(w_j - z_j)^{\alpha_j + 1}} dw_1 \cdots dw_n.$$

I.1.1. Théorème. — *Une fonction holomorphe dans Ω est analytique dans Ω.*

Démonstration. — Pour $z \in D = D_r(z^0)$, $w \in \partial_0 D$,

$$\prod_{j=1}^n \frac{1}{w_j - z_j^0} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \prod_{j=1}^n \frac{(z_j - z_j^0)^{\alpha_j}}{(w_j - z_j^0)^{\alpha_j + 1}},$$

la convergence étant uniforme en w. En multipliant par $f(w_1, \ldots, w_n)$ et en intégrant terme à terme la série nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (z - z^0)^\alpha \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(w) \prod_{j=1}^n \frac{1}{(w_j - z_j^0)^{\alpha_j + 1}} dw_1 \cdots dw_n \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(z^0)(z - z^0)^\alpha. \end{aligned}$$ □

De la formule de Cauchy on déduit également les *inégalités de Cauchy*. Soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω et soit $D_r(z_0) \subset \Omega$. Si $|f(z)| \leqslant M$ dans $D_r(z^0)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$|\partial^\alpha f(z^0)| \leqslant M \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}}.$$

Une fonction holomorphe possède la *propriété de moyenne* : soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω, et soit $\overline{D_r(z)} \subset \Omega$, alors

$$f(z) = \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} f(w)\, d\lambda(w),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Plus généralement

$$\partial^\alpha f(z) = \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j + 1)!}{r^{2|\alpha|}} \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} f(w) \overline{(w - z)^\alpha}\, d\lambda(w).$$

Par suite

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} |f(w)|\, d\lambda(w),$$

$$|\partial^\alpha f(z)| \leqslant \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j+1)!}{r^{|\alpha|}} \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} |f(w)|\, d\lambda(w).$$

Une conséquence de la propriété de moyenne est la suivante : soient Ω un domaine, Q un compact contenu dans Ω, et ω un voisinage ouvert relativement compact de Q d'adhérence $\overline{\omega}$ contenue dans Ω. Il existe des constantes C_α ($\alpha \in \mathbb{N}^n$) telles que, pour toute fonction f holomorphe dans Ω,

$$\sup_Q |\partial^\alpha f| \leqslant C_\alpha \int_\omega |f|\, d\lambda.$$

Il existe en effet $r > 0$ tel que, pour tout z de Q, le polydisque $D_r(z)$ soit contenu dans ω. D'après ce qui précède, si f est holomorphe dans Ω, $z \in Q$,

$$|\partial^\alpha f(z)| \leqslant C_\alpha \int_{D_r(z)} |f(w)|\, d\lambda(w) \leqslant C_\alpha \int_\omega |f(w)|\, d\lambda(w),$$

où

$$C_\alpha = \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j+1)!}{r^{|\alpha|}} \frac{1}{(\pi r^2)^n}.$$

Le *principe du prolongement analytique* s'énonce : si deux fonctions holomorphes dans un domaine Ω coïncident au voisinage d'un point, elles sont égales dans Ω.

Si une fonction f est holomorphe dans un domaine Ω de $\mathbb{C}$ ($n = 1$), et si l'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation $z^0 \in \Omega$, alors f est identiquement nulle. Ce n'est plus vrai dans le cas des fonctions holomorphes de plusieurs variables ($n \geqslant 2$). Mais alors nous disposons de l'énoncé suivant qui nous sera utile pour démontrer des égalités de fonctions holomorphes.

I.1.2. Théorème. — *Soit M une variété réelle contenue dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'en tout point z de M le sous-espace complexe de $\mathbb{C}^n$ engendré par l'espace tangent $T_z(M)$ de M est égal à $\mathbb{C}^n$. Alors une fonction holomorphe f dans Ω qui s'annule sur M est identiquement nulle.*

Démonstration. — Soit $z \in M$. Pour tout $w \in T_z(M)$,

$$D_w f(z) = 0,$$

et, puisque f est holomorphe, cela implique que

$$D_{iw} f(z) = 0.$$

Donc les dérivées du premier ordre de f sont nulles sur M. Par suite toutes les dérivées de f sont nulles sur M. Puisque f est analytique, f est nulle au voisinage de M, donc f est identiquement nulle d'après le principe du prolongement analytique. □

Indiquons deux exemples où ce théorème s'applique.