Séminaires & Congrès
7, 2003, p. 45–100

ESPACES DE DAMEK-RICCI, GÉOMÉTRIE ET ANALYSE

par

François Rouvière

Résumé. — Introduits comme certains groupes de Lie résolubles munis d'une métrique invariante à gauche, les espaces de Damek-Ricci généralisent les espaces hyperboliques. Ils fournissent une large classe d'exemples de variétés riemanniennes harmoniques qui ne sont pas des espaces symétriques.
En l'absence du groupe compact K des espaces symétriques G/K, l'extension aux espaces de Damek-Ricci des résultats classiques de géométrie et d'analyse harmonique hyperboliques (géodésiques, fonctions sphériques, équations de la chaleur ou des ondes, transformation de Radon) comporte des difficultés nouvelles. On décrit les méthodes qui permettent d'étendre ces résultats.

***Abstract* (Damek-Ricci spaces : Geometry and Analysis).** — Generalizing hyperbolic spaces, Damek-Ricci spaces are defined as certain solvable Lie groups equipped with a left-invariant metric. They provide a large class of examples of Riemannian harmonic manifolds which are not symmetric spaces.
Extending to all Damek-Ricci spaces classical results about hyperbolic geometry and harmonic analysis (geodesics, spherical functions, heat or wave equations, Radon transform) entails new difficulties, because of the lack of the compact group K of symmetric spaces G/K. We describe the methods allowing such extensions.

1. Introduction

On sait le rôle important joué en analyse sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, par la fonction $1/r^{n-2}$, où r est la distance à une origine (arbitraire) de l'espace : c'est, à un facteur près, une solution élémentaire radiale de l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_1^n (\partial/\partial x^i)^2$. Pour $n = 3$ notamment, le potentiel $1/r$ est un outil fondamental de la théorie de la gravitation newtonienne, ou de l'électrostatique.

Il est naturel de chercher à étendre ce résultat à une variété riemannienne M de dimension n. Sa métrique définit une notion de distance géodésique $d(x, y)$ entre les

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22E25, 43A80, 43A90, 53B20, 53C22.
Mots clefs. — Variété harmonique, espace de Damek-Ricci, espace hyperbolique, géodésique, fonction sphérique.

points x, y de M, et un opérateur de Laplace-Beltrami L. Étant donnée une origine $m \in M$, l'opérateur L admet-il (au moins localement) une solution élémentaire radiale autour de m, *i.e.* fonction de $d(m, x)$ seul ? Quelques premiers résultats dans ce sens ont été obtenus par H. Ruse en 1930, mais il est vite apparu que la réponse est en général négative pour une variété riemannienne arbitraire. J. Hadamard avait, par ailleurs, donné une construction générale d'une solution élémentaire de L, se comportant au voisinage de m comme $1/d(m, x)^{n-2}$, mais non nécessairement radiale (*cf.* [**SS**]).

On dit que M est une *variété harmonique* si, pour toute origine $m \in M$, le laplacien L admet une solution élémentaire radiale autour de m. Sur une telle variété on peut espérer réduire nombre de problèmes d'analyse, par moyenne sur des sphères, à des questions de fonctions radiales, soit en fin de compte à de l'analyse à une dimension. Il est donc utile de chercher à caractériser les variétés harmoniques.

En 1944, l'article [**L**] d'A. Lichnérowicz apporte plusieurs réponses à cette question, montre que toute variété harmonique est d'Einstein, et esquisse une preuve du fait que toute variété harmonique de dimension au plus 4 est un espace symétrique. Il se termine par les deux phrases (où H_n signifie variété harmonique de dimension n) :

« *Il est intéressant de savoir dans quelle mesure le résultat énoncé relatif aux H_4 peut s'étendre à des espaces H_n quelconques. Je reviendrai sur cette question ultérieurement.* »

Un peu abusivement baptisé « conjecture de Lichnérowicz », ce problème (une variété harmonique est-elle nécessairement un espace symétrique ?) est longtemps resté sans réponse satisfaisante. En 1990, Z. Szabó [**S**] donne une réponse affirmative pour les variétés harmoniques *compactes* simplement connexes et la surprise n'en est que plus grande, en 1992, quand Ewa Damek et Fulvio Ricci(1) [**DR1**] exhibent une large classe de variétés harmoniques (non compactes) qui ne sont pas des espaces symétriques.

À l'origine de cette construction est un article d'A. Kaplan [**Ka**], qui introduit en 1980 la classe des groupes de Lie nilpotents « de type Heisenberg » afin de construire des solutions élémentaires explicites pour leurs sous-laplaciens, qui sont des opérateurs différentiels hypoelliptiques du second ordre. On appelle désormais « *espaces de Damek-Ricci* », ou « *groupes harmoniques NA* », des groupes de Lie obtenus par produit semi-direct d'un groupe nilpotent de type Heisenberg N par une droite A, et munis d'une métrique riemannienne invariante à gauche.

Parmi eux figurent les espaces riemanniens symétriques de rang un et de type non compact, c'est-à-dire les espaces hyperboliques réels, complexes, ou quaternioniques, et l'espace hyperbolique exceptionnel. Ces derniers sont en effet de la forme G/K, où G est un groupe de Lie semi-simple et K un sous-groupe compact maximal, et peuvent être identifiés au sous-groupe résoluble NA d'une décomposition d'Iwasawa

(1)Le « tenseur de Ricci » est dû à Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), connu pour ses travaux sur l'analyse tensorielle et la géométrie différentielle.

$G = NAK$ de G. Mais la classe des espaces de Damek-Ricci comporte bien d'autres exemples que ceux-là, qui ne sont pas des espaces symétriques bien qu'étant tous des variétés harmoniques. Dans la liste ci-dessous (par ordre décroissant) de quelques classes remarquables de variétés riemanniennes :

(1) variétés d'Einstein
(2) variétés harmoniques
(3) espaces de Damek-Ricci
(4) espaces riemanniens symétriques de rang un, de type non compact,

l'inclusion $3 \supset 4$ est stricte. On peut penser que $2 \supset 3$ l'est aussi, mais on n'en connaît pas d'exemple.

Pour d'autres généralisations de la notion d'espace symétrique (espaces faiblement symétriques, espaces de D'Atri, etc.), voir le chapitre 2 de [**BTV**].

L'analyse harmonique sur les espaces de Damek-Ricci connaît, depuis 1992, un développement rapide. Mais, si ses résultats ont de nombreuses analogies formelles avec ceux des espaces hyperboliques, il ne s'agit cependant pas d'une généralisation triviale : le groupe compact K, fréquemment utilisé dans les preuves classiques, fait ici défaut, et la notion de fonction radiale, moins facile à manipuler, doit faire l'objet d'une approche différente [**DR2**]. On parvient néanmoins à des résultats satisfaisants, et assez complets [**ADY, ACDi, DR2, R**]... : formules d'inversion de Fourier et de Plancherel, théorème de Paley-Wiener, résolution explicite de l'équation de la chaleur, de l'équation des ondes... La théorie des espaces de Damek-Ricci est déjà suffisamment riche pour qu'il semble opportun d'en esquisser un bilan (provisoire) ; c'est l'objectif de ces notes, tirées des articles originaux. On s'efforcera d'insister sur le rôle de la géométrie.

Afin de limiter les connaissances préalables nécessaires, on résume au *chapitre 2* (sans démonstration) les bases de la géométrie riemannienne locale. On pourra donc aborder ce cours avec seulement quelques notions sur les variétés, et sur les groupes et algèbres de Lie. Une certaine familiarité avec les espaces hyperboliques, qui motivent nombre de constructions effectuées ici, est toutefois souhaitable ; on pourra l'acquérir par exemple dans [**H2**] p. 29–72 (espace $H^2(\mathbb{R})$), ou dans [**F**] (espaces $H^n(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est le corps des réels, ou des complexes, ou celui des quaternions). La comparaison détaillée du point de vue classique sur les espaces hyperboliques avec celui, plus général, des espaces de Damek-Ricci est reportée au *chapitre 6* de ces notes.

Au *chapitre 3* on introduit l'importante notion de moyennes sphériques sur une variété riemannienne, qui conduit à diverses caractérisations des variétés harmoniques. Les espaces de Damek-Ricci sont définis au *chapitre 4*, où on détaille ensuite quelques-unes de leurs propriétés géométriques (géodésiques, réalisation comme boule unité). Le *chapitre 5* est consacré à l'analyse harmonique (pour les fonctions radiales d'abord, puis en général), et à quelques-unes de ses applications (transformations intégrales, équation de la chaleur, équation des ondes).

Remerciements. — Ces notes correspondent à un cours de huit heures effectué dans le cadre de l'École d'été « Analyse harmonique et théorie des représentations ». Organisée et financée conjointement par le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (C.I.M.P.A.) et plusieurs Universités marocaines, cette École s'est déroulée à Kenitra (Maroc) du 19 juillet au 4 août 1999. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ces organismes pour leur invitation, et tout particulièrement aux Professeurs Mohamed Akkouchi et Allal Bakali pour la qualité de l'organisation et la gentillesse de leur accueil à l'Université Ibn Tofail de Kenitra.

2. Rappels de géométrie riemannienne

Dans ce chapitre on notera toujours M (initiale de manifold) une variété différentiable réelle de classe C^∞, connexe, et n sa dimension. Dans les calculs en coordonnées locales, on adopte ici la *convention d'Einstein* : lorsqu'une même lettre apparaît une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur, on doit sommer sur cet indice de 1 à n. Ainsi

$$a_i x^i = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j, \quad \Gamma^j_{ij} = \sum_{j=1}^n \Gamma^j_{ij}, \text{ etc.}$$

On rappelle ici quelques notions et propriétés fondamentales de géométrie riemannienne locale, en renvoyant à [**BGM**], [**H1**], [**KN**] ou [**W**] (par exemple) pour les démonstrations.

2.1. Champs de vecteurs. — On note $T_m M$ l'espace vectoriel tangent au point $m \in M$. On appelle *champ de vecteurs* sur M la donnée, en chaque point, d'un vecteur tangent $X(m) \in T_m M$ fonction C^∞ de ce point. Dans un système de coordonnées locales de la variété :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto m = \varphi(x), \end{aligned}$$

(où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, et φ est un difféomorphisme de Ω sur un ouvert de M), cela se traduit par la donnée d'un champ de vecteurs $V(x)$ sur Ω (application C^∞ de Ω dans $\mathbb{R}^n$), avec $X(\varphi(x)) = D\varphi(x)V(x)$ en notant $D\varphi$ l'application tangente. En particulier chaque vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, considéré comme champ de vecteurs constant, donne le champ[(2)]

$$E_i(\varphi(x)) = D\varphi(x)e_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \tag{1}$$

[(2)] De nombreux auteurs notent ∂_i notre champ E_i sur l'ouvert de carte de M. Pour éviter les confusions, on préfère ici réserver la notation ∂_i pour $\partial/\partial x^i$, c'est-à-dire pour le champ de vecteurs (constant) e_i sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

sur l'ouvert $\varphi(\Omega)$ de M. En notant $V(x) = X^i(x)e_i$ la décomposition de V selon la base (e_i) de $\mathbb{R}^n$ on obtient la décomposition correspondante de $X(m)$ selon la base $(E_i(m))$ de T_mM

$$X(\varphi(x)) = X^i(x)E_i(\varphi(x)).$$

À un champ de vecteurs X sur M est associé le système différentiel autonome

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = m,$$

dont la solution (définie pour t suffisamment voisin de 0) est $\gamma(t) = \phi_t(m)$, *flot* du champ de vecteurs.

À un champ de vecteurs est associé enfin l'*opérateur différentiel* du premier ordre sur M

$$Xu(m) = \langle Du(m), X(m)\rangle,$$

où u est une fonction C^∞ sur M, et son application tangente $Du(m)$ est vue comme forme linéaire sur l'espace tangent T_mM. On a ainsi

$$(Xu)(\phi_t(m)) = \frac{d}{dt}u(\phi_t(m)).$$

En coordonnées locales, u se traduit par $u \circ \varphi$ et l'égalité précédente par

$$\begin{aligned}(Xu)(\varphi(x)) &= \langle Du(\varphi(x)), D\varphi(x)V(x)\rangle \\ &= \langle D(u\circ\varphi)(x), V(x)\rangle \\ &= X^i(x)\partial_i(u\circ\varphi)(x),\end{aligned} \tag{2}$$

en notant $\partial_i = \partial/\partial x^i$ pour abréger[(3)]. L'opérateur différentiel X est donc traduit par l'opérateur $X^i(x)\partial_i$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Le *crochet* $[X, Y]$ de deux champs de vecteurs X et Y sur M est défini par

$$[X, Y]u = X(Yu) - Y(Xu), \quad u \in C^\infty(M).$$

C'est encore (l'opérateur différentiel associé à) un champ de vecteurs sur M. On a par exemple, avec les notations de (1),

$$[E_i, E_j] = 0,$$

conséquence immédiate du théorème de Schwarz $[\partial_i, \partial_j] = 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, si $X^i(x)\partial_i$ et $Y^j(x)\partial_j$ sont les écritures respectives de X et Y en coordonnées locales, celle de $[X, Y]$ est

$$\left(X^i\partial_iY^j - Y^i\partial_iX^j\right)(x)\partial_j.$$

(3) Noter la position des indices, qui permet d'utiliser la convention d'Einstein.