Séminaires & Congrès
8, 2004, p. 1–57

IMAGE INVERSE EN THÉORIE DES $\mathscr{D}$-MODULES

par

Philippe Maisonobe & Tristan Torrelli

Résumé. — Dans ce cours, nous exposons les résultats de base sur le foncteur image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-modules. Après quelques généralités, nous donnons les premiers résultats dans le cas d'un morphisme non caractéristique. Puis nous montrons l'existence d'équations fonctionnelles de Bernstein associées à une section d'un $\mathscr{D}$-module holonome. Nous en déduisons que les foncteurs image inverse et cohomologie locale préservent l'holonomie. Nous montrons ensuite que ces foncteurs commutent. Enfin, nous étudions le morphisme canonique entre l'image inverse des solutions et les solutions de l'image inverse. Ces résultats sont à la base de la notion d'irrégularité d'un $\mathscr{D}$-module holonome.

***Abstract* (Inverse image in the theory of $\mathscr{D}$-Modules).** — This course deals with basic properties of the inverse image functor in $\mathscr{D}$-modules theory. After some generalities, we give the first results in the case of a non-characteristic morphism. Then we prove the existence of Bernstein functional equations associated with a section of an holonomic $\mathscr{D}$-module. We deduce that the inverse image functor and the local cohomology functor preserve holonomicity. Moreover, we prove that these two functors commute. Finally, we study the canonical morphism between the inverse image of the solutions and the solutions of the inverse image. These results are at the origin of the definition of the irregularity of a holonomic $\mathscr{D}$-module.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32C38.
Mots clefs. — $\mathscr{D}$-module, foncteur image inverse.

Introduction

Le but de ce cours est de donner certains résultats de base sur l'image inverse de systèmes différentiels. Précisons le contenu de chacun des chapitres.

Chapitre I : Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés analytiques complexes. Nous commençons par définir le foncteur image inverse f^*, de la catégorie des $\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche vers la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche et Lf^* son foncteur dérivé. Comme $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, le calcul d'une image inverse se ramène aux calculs des images inverses de projections ou d'immersions par des sous-variétés. Nous constatons que l'image inverse par une projection p est de nature triviale : p^* est un foncteur exact qui préserve la cohérence et l'holonomie. De plus, si M est un $\mathscr{D}$-Module à gauche cohérent, la variété caractéristique de p^*M se déduit de celle de M de façon simple. L'image inverse par l'immersion i d'une sous-variété contient donc toute la difficulté.

Dans un système de coordonnées locales, Li^*M est isomorphe à un complexe de Koszul $K^\bullet(M)$ associé à M. Nous constatons que lorsque M est algébriquement supporté par l'image de i, $K^\bullet(M)$ est le complexe de Koszul associé à une suite corégulière. D'autre part, si M est un Module de type fini sur l'anneau des opérateurs *relatifs par rapport à l'image de i* (voir le corollaire I.3.3), $K^\bullet(M)$ est le complexe de Koszul associé à une suite régulière. Dans ces deux cas, Li^*M n'a donc de la cohomologie qu'en un seul degré. Nous terminons le chapitre en donnant le résultat très général suivant : si M et N sont des $\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche :

$$Lf^*M \otimes^L_{\mathscr{O}_X} Lf^*N \simeq Lf^*(M \otimes^L_{\mathscr{O}_Y} N)$$

Chapitre II : Nous étudions ici l'image inverse d'un $\mathscr{D}$-Module à gauche cohérent par un morphisme non caractéristique, et ce d'un point de vue algébrique. Si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent et si $i : Y \to X$ est l'immersion d'une sous-variété de X, Y est *non caractéristique pour* M si l'intersection de la variété caractéristique de M et du fibré conormal à Y est contenue dans la section nulle du fibré cotangent à X. Par exemple, si Y est l'hypersurface d'équation $x_1 = 0$ dans $\mathbf{C}^n$, et si P est l'opérateur $(\partial/\partial x_1)^{r_1} + A_1(\partial/\partial x_1)^{r_1-1} + \cdots + A_{r_1}$ où les A_j sont des opérateurs différentiels indépendants de $(\partial/\partial x_1)$, de degré inférieur ou égal à j, alors l'hypersurface Y est non caractéristique pour le $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}/\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}P$. On montre alors que l'image inverse par l'immersion i d'une sous-variété non caractéristique est un foncteur exact et préserve la cohérence. De plus, on obtient une majoration de la variété caractéristique de i^*M. Cette majoration est en fait une égalité. Nous donnons l'idée d'une preuve cohomologique de ce résultat. Le point clef de cette preuve est qu'un $\mathscr{D}_X$-Module holonome admet une bonne filtration telle que les sous-modules de son gradué soient tous de dimension $\dim X$; on en déduit alors une filtration de i^*M telle que $\operatorname{gr} i^*M \simeq i^* \operatorname{gr} M$. Ces résultats s'étendent aux images inverses par un morphisme non caractéristique. Comme application, nous donnons une condition nécessaire pour qu'un produit tensoriel de $\mathscr{D}$-Modules à gauche cohérents (resp. holonomes) conserve la cohérence (resp. l'holonomie). Pour cela, nous calculons la variété caractéristique d'un produit externe, ce qui nécessite quelques techniques de divisions introduites dans le cours de F. Castro et M. Granger. Nous définissons enfin les systèmes de Cauchy généralisés relativement à l'hypersurface lisse de $\mathbf{C}^n$ d'équation $x_1 = 0$. Nous montrons qu'un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche cohérent est localement isomorphe à un système de Cauchy généralisé s'il admet une bonne filtration dont le gradué soit un $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\xi_2, \ldots, \xi_n]$-module libre. Nous en déduisons que tout $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n}$-Module à gauche cohérent pour lequel l'hypersurface $x_1 = 0$ est non caractéristique admet une résolution locale de longueur $2n-1$ par des systèmes de Cauchy généralisés.

Chapitre III : Soit X une variété analytique et $f : X \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Dans ce paragraphe, nous montrons d'abord que toute section m d'un Module holonome M admet localement une équation fonctionnelle non triviale du type $b(s)mf^s \in \mathscr{D}_X[s]mf^{s+1}$ où b est un polynôme d'une variable à coefficients complexes. Nous en déduisons que si M est un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche cohérent, holonome en dehors de l'hypersurface d'équation $f = 0$, il est holonome et de plus $M[1/f]$ est un Module holonome. Nous démontrons alors en toute généralité la conservation de l'holonomie par image inverse. En fin de chapitre, nous introduisons la notion de $\mathscr{D}$-Module spécialisable le long d'une hypersurface lisse. Toute section m d'un tel Module vérifie localement des équations du type $b(x_1(\partial/\partial x_1))m \in V_{-1}(\mathscr{D})m$, où b est un polynôme non nul, $x_1 = 0$ une équation locale de l'hypersurface et $V_{-1}(\mathscr{D})$ le terme de degré -1 de la filtration croissante de $\mathscr{D}$ par le poids des opérateurs obtenue en donnant le poids -1 à x_1, le poids 1 à $(\partial/\partial x_1)$ et le poids 0 aux autres variables et dérivations élémentaires. Si m est une section d'un Module holonome, nous obtenons une équation de spécialisation directement à partir de l'équation fonctionnelle associée à mx_1^s. En particulier, tout $\mathscr{D}$-Module holonome est spécialisable le long de toute hypersurface lisse.

Chapitre IV : Soit Y un sous-espace analytique d'une variété analytique X. Étant donné un $\mathscr{D}_X$-Module à gauche M, nous montrons que les $\mathscr{O}_X$-Modules $\Gamma_{[Y]}M$ et $M(\star Y)$ sont munis de structures naturelles de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Nous définissons ainsi deux foncteurs de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche : $\Gamma_{[Y]}-$, foncteur de cohomologie locale algébrique à support Y, et $-(\star Y)$. Nous en donnons les premières propriétés : itérations, comportement relatif au produit tensoriel, composition, triangle de Mayer-Vietoris. Lorsque Y est localement intersection complète, nous représentons localement $R\Gamma_{[Y]}M$ par un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche. Nous calculons ensuite le triangle de cohomologie locale d'un système de Cauchy généralisé. Nous montrons alors que la cohomologie locale conserve toujours l'holonomie et qu'elle préserve la cohérence si Y est une sous-variété non caractéristique. Nous montrons ensuite que les foncteurs image inverse et cohomologie locale commutent : $Lf^*R\Gamma_{[Y]}M \simeq R\Gamma_{[f^{-1}Y]}Lf^*M$, pour tout morphisme f à valeurs dans X, pour tout sous-espace analytique Y et tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche M. Le cas d'une projection est simple. Pour une immersion, notre preuve utilise les structures de $\mathscr{D}$-Modules. Nous terminons enfin le paragraphe en identifiant Li^*M et $R\Gamma_{[Y]}M$ pour tout $\mathscr{D}_X$-Module à gauche lorsque $i : Y \to X$ est l'immersion d'une sous-variété lisse.

Chapitre V : Soit $f : X \to Z$ un morphisme entre deux variétés analytiques. En utilisant une résolution du bi-module $\mathscr{D}_{X\to Z}$, nous précisons une flèche naturelle pour tout couple (M, L) de $\mathscr{D}_Z$-Modules à gauche entre $f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M, L)$ et $R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, Lf^*L)$. Si $L = \mathscr{O}_Z$, cette flèche, notée $\mathrm{can}(f, M)$, relie l'image inverse des solutions holomorphes de M et les solutions holomorphes de l'image inverse. Nous montrons que si f est une projection, $\mathrm{can}(f, M)$ est un isomorphisme. Si $i : Y \to X$ désigne l'inclusion d'une sous-variété lisse fermée et M un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules tel que $R\Gamma_{[Y]}M$ est à cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérente, nous montrons que le morphisme $\mathrm{can}(i, M)$ s'écrit $\mathrm{can}(i, M) = \delta(M) \circ \alpha(Y, M)$ où $\alpha(Y, M)$ le morphisme naturel $R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X)_{|Y} \to R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}M, \mathscr{O}_X)_{|Y}$ et $\delta(M)$ est un isomorphisme naturel. Si de plus Y est non caractéristique pour M, nous montrons à l'aide du théorème de Cauchy-Kovalevska classique que $\mathrm{can}(i, M)$ et $\alpha(Y, M)$ sont des isomorphismes. Nous établissons ainsi que lorsque le morphisme f est non caractéristique pour un $\mathscr{D}_Z$-Module à gauche cohérent M, les complexes $f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Z}(M, \mathscr{O}_Z)$ et $R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(Lf^*M, \mathscr{O}_X)$ sont isomorphes. Nous appliquons ce théorème pour montrer que les groupes de cohomologie du complexe des solutions holomorphes d'un $\mathscr{D}$-Module holonome vérifient des conditions de support. Ce résultat est utilisé dans le cours de L. Narváez-Macarro pour établir que le complexe des solutions holomorphes d'un $\mathscr{D}$-Module holonome est un faisceau pervers. Signalons que le morphisme α garde un sens relativement à un sous-espace analytique et est utilisé dans le cours de Z. Mebkhout pour définir les Modules holonomes réguliers. Après avoir donné une preuve du théorème de Cauchy-Kovalevska, nous terminons ce paragraphe avec une proposition utile pour comparer les solutions holomorphes relatives et absolues de certains $\mathscr{D}$-Modules à gauche.

Nous remercions M. Granger pour ses remarques sur ce texte.

I. Définition et généralités

1. Définition. — Soit X une variété analytique complexe de dimension n. On désigne par $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions analytiques sur X, $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X, $\mathscr{D}_X(k)$, $k \in \mathbf{N}$, le terme d'ordre k de la filtration canonique de $\mathscr{D}_X$, et $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X)$ la catégorie des $\mathscr{D}_X$-Modules à gauche.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux variétés analytiques lisses. Le faisceau $\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ est le sous-faisceau filtré croissant du faisceau $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$:

$$\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X) = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \mathrm{Diff}^k(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$$

défini par les conditions suivantes :

- $\mathrm{Diff}^0(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X) = \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{O}_Y}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$
- un opérateur P appartient à $\mathrm{Diff}^k(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$, $k \in \mathbf{N}^*$, si pour tout $g \in f^{-1}\mathscr{O}_Y$, l'application :

$$f^{-1}\mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_X \ ; \ h \longmapsto P(gh) - gP(h)$$

définit un opérateur de $\mathrm{Diff}^{k-1}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$.

Soit ω un point de X. Plaçons nous dans des systèmes de coordonnées locales centrés en ω et $f(\omega)$; le morphisme f est défini par :

$$f : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^p \ ; \ x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (y_1 = f_1(x), \dots, y_p = f_p(x))$$

Les opérateurs de $\mathrm{Diff}^k(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ se lisent :

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p),|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_p}\right)^{\alpha_p}$$

avec $a_\alpha(x) \in \mathscr{O}_X$. Comme $\mathscr{D}_X$ et $\mathscr{D}_Y$ sont par définition des sous-faisceaux de $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ et $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y)$, on vérifie que $\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche et de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Module à droite.

D'autre part, posons :

$$\mathscr{D}_{X\to Y} = \mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{D}_Y$$

C'est un faisceau filtré croissant :

$$\mathscr{D}_{X\to Y} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \mathscr{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\mathscr{D}_Y(k)$$

où $\mathscr{D}_Y(k)$ est le terme d'ordre k de la filtration de $\mathscr{D}_Y$ par le degré des opérateurs.

Constatons que l'injection canonique de $\mathscr{D}_{X\to Y}$ dans $\mathscr{H}om_{\mathbf{C}}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ identifie $\mathscr{D}_{X\to Y}$ et $\mathrm{Diff}(f^{-1}\mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_X)$ comme faisceaux filtrés. Le faisceau $\mathscr{D}_{X\to Y}$ est ainsi muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche et de $f^{-1}\mathscr{D}_Y$-Module à droite. Dans des systèmes de coordonnées locales, la structure de $\mathscr{D}_X$-Module à gauche est définie par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a \otimes P) = \frac{\partial a}{\partial x_i} \otimes P + \sum_{j=1}^{p} a \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial y_j} P$$

où a et P sont respectivement des sections de $\mathscr{O}_X$ et $f^{-1}\mathscr{D}_Y$.

Définition 1.1. — Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques lisses et M un $\mathscr{D}_Y$-Module à gauche. On appelle *image inverse* de M, le $\mathscr{D}_X$-Module à gauche :

$$f^*M = \mathscr{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}_Y} f^{-1}M$$

De plus, si $\phi : M \to N$ est un morphisme de $\mathscr{D}_Y$-Modules à gauche, on définit un morphisme naturel $f^*(\phi) : f^*M \to f^*N$. Ainsi f^* est un foncteur additif exact à droite de $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_Y)$ vers $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X)$.