Séminaires & Congrès
8, 2004, p. 149–164

EXTENSIONS DE DELIGNE POUR LES CROISEMENTS NORMAUX

par

Joël Briançon

Résumé. — Étant donné une connexion holomorphe intégrable sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux, nous en construisons, suivant P. Deligne, un prolongement méromorphe régulier.

***Abstract* (Deligne extension for normal crossings).** — Given an integrable holomorphic connection on the complement of a divisor with normal crossings, we construct, following P. Deligne, a regular meromorphic extension.

Introduction

Dans [**M**], suivant P. Deligne [**D**], B. Malgrange nous explique comment construire une connexion méromorphe régulière sur une variété analytique complexe X, prolongeant une connexion holomorphe (intégrable) donnée sur le complémentaire d'une hypersurface Y de X ; cela permet de montrer « l'essentielle surjectivité » du foncteur de restriction de la catégorie des connexions méromorphes régulières à pôles le long de Y vers la catégorie des connexions holomorphes sur $X - Y$.

Pour obtenir ce résultat, B. Malgrange utilise le théorème global de résolution des singularités (de H. Hironaka), après avoir exhibé un tel prolongement lorsque Y est un diviseur à croisements normaux. Dans ce cours, nous proposons de reprendre et d'expliciter cette dernière construction du « prolongement de Deligne ».

1. Rappels sur les connexions holomorphes

U désigne une variété analytique complexe connexe de dimension n (dans les paragraphes suivants, U sera $X-Y$), $\mathscr{O}_U$ son faisceau structural, Ω_U^j le faisceau-des formes différentielles holomorphes de degré j, d la différentielle de De Rham ; dans les cours

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32S, 14B.
Mots clefs. — Connexions méromorphes régulières.

du CIMPA d'août et septembre 1990, il a été démontré l'équivalence entre les catégories suivantes (nous rappelons seulement la description des objets, les morphismes étant naturels) :

1.1. les fibrés vectoriels holomorphes munis d'une connexion intégrable

Un objet de cette catégorie est donc un couple (F, ∇) formé d'un fibré vectoriel holomorphe F de rang fini, identifié au faisceau de $\mathscr{O}_U$-Modules localement libre de ses sections holomorphes, et d'une connexion intégrable ∇ sur F.

Un morphisme est un morphisme de fibrés qui commute aux connexions. Rappelons qu'une connexion sur F est un morphisme $\mathbf{C}$-linéaire :

$$\nabla : F \longrightarrow \Omega^1_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F$$

vérifiant, pour tout $h \in \mathscr{O}_U$ et tout $f \in F$:

$$\nabla(hf) = dh \otimes f + h\nabla(f)$$

L'application ∇ se prolonge naturellement et de manière unique :

$$\nabla^j : \Omega^j_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F \longrightarrow \Omega^{j+1}_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F$$

satisfaisant, pour tout $\omega \in \Omega^j_U$ et $f \in F$:

$$\nabla^j(\omega \otimes f) = d\omega \otimes f + (-1)^j \omega \wedge \nabla(f)$$

La connexion est dite intégrable si $\nabla^1 \circ \nabla = 0$; si tel est le cas,

$$(\Omega^*_U \otimes_{\mathscr{O}_U} F, \nabla^*)$$

est un complexe, le complexe de De Rham associé à la connexion.

Le faisceau $V = \mathrm{Ker}(\nabla)$ s'appelle le faisceau-des sections horizontales de la connexion. Le théorème fondamental suivant s'obtient à partir du théorème de Cauchy pour les systèmes différentiels holomorphes à une seule variable, avec paramètres (voir par exemple [**GM**] p. 134–139) :

Théorème 1. — *Si (F, ∇) est une connexion intégrable de rang m, le faisceau $V = \mathrm{Ker}(\nabla)$ de ses sections horizontales est un système local de rang m.*

Rappelons qu'un « système local » est, par définition, un « faisceau localement constant d'espaces vectoriels » ; pour un exposé détaillé sur les systèmes locaux, voir [**MN**] p. 50–62.

Calcul local. — Soit $\varepsilon = (e_1, \dots, e_m)$ une base (locale) de F sur $\mathscr{O}_U$; posons : $\nabla(e_j) = \omega_{1,j} \otimes e_1 + \cdots + \omega_{m,j} \otimes e_m$; la matrice de formes de degré un, $\Omega = (\omega_{i,j})$ s'appelle la forme de la connexion dans la base ε. Pour un élément $f = y_1 e_1 + \cdots + y_m e_m$ de F, son image par ∇ est : $\nabla(f) = z_1 e_1 + \cdots + z_m e_m$ où le vecteur colonne Z des composantes s'obtient à partir du vecteur colonne Y des composantes de f par la formule :

$$Z = dY + \Omega Y$$

La connexion est intégrable (on dit aussi « plate ») si et seulement si sa forme dans une base ε vérifie :

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

Les sections horizontales s'obtiennent comme solutions du système différentiel :

$$dY = -\Omega Y$$

Changement de base. — Soit $\varepsilon' = (e'_1, \dots, e'_m)$ une autre base de F et $S = (s_{i,j})$ la matrice de passage (holomorphe inversible) de la base ε vers la base ε' :

$$e'_j = s_{1,j}e_1 + \cdots + s_{m,j}e_m$$

la forme Ω' de la connexion dans la nouvelle base est :

$$\Omega' = S^{-1}dS + S^{-1}\Omega S$$

1.2. Les systèmes locaux. — Un objet de cette catégorie est un système local V sur U d'espaces vectoriels complexes de dimension finie ;

Corollaire 1. — *Le foncteur qui à une connexion intégrable associe ses sections horizontales est une équivalence entre la catégorie des connexions intégrables sur U et la catégorie des systèmes locaux sur U.*

Un foncteur quasi-inverse peut être construit de la façon suivante : à V on associe $F = \mathscr{O}_U \otimes_{\mathbf{C}} V$ muni de la connexion satisfaisant :$\nabla(h \otimes v) = dh \otimes v$ pour tout h de $\mathscr{O}_U$ et v dans V.

1.3. Les modules différentiels dont le support singulier est vide

Il s'agit donc des $\mathscr{D}_U$ -Modules dont la variété caractéristique est la section nulle du fibré cotangent à U. Le théorème suivant est démontré dans [**GM**] (théorème 4 p. 137) :

Théorème 2. — *Le foncteur qui à un $\mathscr{D}_U$ -Module cohérent M sur U associe la connexion (M, ∇) définie dans tout système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ et toute section locale f de M par :*

$$\nabla(f) = dx_1 \otimes \frac{d}{dx_1} f + \cdots + dx_n \otimes \frac{d}{dx_n} f$$

est une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}_U$ -Modules cohérents sur U ayant un support singulier vide et la catégorie des connexions intégrables sur U.

Un foncteur quasi-inverse se construit ainsi : si (F, ∇) est une connexion intégrable, $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales, f une section locale de F, on pose :

$$\nabla(f) = dx_1 \otimes f_1 + \cdots + dx_n \otimes f_n$$

puis, pour $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{d}{dx_i} f = f_i$$

1.4. Les représentations complexes finies du groupe fondamental

Dans [**MN**] (pp. 55–57) est décrite la façon dont on peut associer à un système local V sur U son groupe de monodromie. Rappelons très brièvement la manière de procéder : tout d'abord, si $\gamma : [0,1] \to U$ est un chemin de U, $\gamma^* V$ est un faisceau constant sur $[0,1]$; on en déduit une flèche naturelle de $V_{\gamma(0)}$ vers $V_{\gamma(1)}$ faisant commuter les isomorphismes entre les sections globales de $\gamma^* V$ sur $[0,1]$, et ses fibres en $\{0\}$ et $\{1\}$; cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Si on fixe un point a de U on obtient ainsi un homomorphisme de $\Pi_1(U,a)$ dans $GL(V_a)$ (c'est en fait un anti-homomorphisme lorsqu'on compose les lacets dans le sens habituel). On a ([**MN**] proposition I.2.5. p. 57) :

Théorème 3. — *Le foncteur qui à un un système local sur U associe la monodromie de sa fibre en un point a de U est une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux sur U et la catégorie des représentations complexes finies de* $\Pi_1(U,a)$

Exemple. — On prend $U = \mathbf{C}^2 - Y$ où Y est le croisement normal défini par $x_1 x_2 = 0$; soit V le sous espace vectoriel de $\mathscr{O}_U$ engendré par les déterminations de la fonction :

$$g = \sqrt{x_1}\log(x_1/x_2)\exp(1/x_2)$$

on note :

$$h = \sqrt{x_1}\exp(1/x_2)$$

a) V est isomorphe au sous espace de $\mathscr{O}_U^2$ engendré par :

$$u = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

b) Le groupe fondamental de U est $\mathbf{Z}^2$, de base les classes des lacets « faisant un tour » autour de $\{x_1 = 0\}$ et $\{x_2 = 0\}$ respectivement. Les monodromies correspondantes sont données dans la base (u,v) par les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2i\pi \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2i\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $F = \mathscr{O}_U \otimes_{\mathbf{C}} V$ est isomorphe à $\mathscr{O}_U^2$, et la matrice de la connexion correspondante dans la base canonique est :

$$\Omega = R_1 \frac{dx_1}{x_1} + R_2 \frac{dx_2}{x_2}$$

avec :

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1/x_2 & 1 \\ 0 & 1/x_2 \end{pmatrix}$$

d) Enfin, le $\mathscr{D}_U$ -Module associé est :

$$\frac{\mathscr{D}_U^2}{\mathscr{D}_U^2(\frac{d}{dx_1}I + M_1) + \mathscr{D}_U^2(\frac{d}{dx_2}I + M_2)}$$

avec I la matrice identité, M_1 et M_2 les matrices transposées des coefficients de dx_1 et dx_2 dans Ω. On remarque que $\Omega = d(-1/x_2) + \Omega'$ où Ω' est la forme de la connexion régulière[(1)] $\mathscr{R}$ (sur $\mathbf{C}^2$) correspondant au système local engendré par les déterminations de $\sqrt{x_1}\log(x_1/x_2)$ et $d(-1/x_2)$ correspond au système irrégulier[(1)] $\mathbf{C}\exp(1/x_2)$; la connexion décrite, de forme Ω, est donc la connexion « élémentaire » :

$$\mathscr{E}^{(1/x_2)} \otimes \mathscr{R}$$

(voir le cours de C. Sabbah).

Bien sûr les deux connexions définies par Ω et Ω' sont isomorphes sur U, l'isomorphisme étant donné par la multiplication par $\exp(-1/x_2)$.

Faisons remarquer pour finir, que, par multiplication par $\exp(\exp(1/x_2))$, nous aurions obtenu une connexion toujours isomorphe aux précédentes sur U, mais non égale à la restriction d'une connexion méromorphe[(1)] sur $\mathbf{C}^2$.

2. Connexions méromorphes

X désigne une variété analytique complexe connexe de dimension n, de faisceau structural $\mathscr{O}_X$, Y une hypersurface de X, $U = X - Y$; $\mathscr{O}_X[*Y]$ est le faisceau-des fonctions méromorphes à pôle le long de Y ; la fibre de ce faisceau en un point a de Y est $\mathscr{O}_{X,a}[1/\varphi]$ si φ désigne une équation locale de Y au voisinage de a. On montre facilement la cohérence de ce faisceau d'anneaux à partir de celle de $\mathscr{O}_X$.

On définit également $\Omega^j_X[*Y] = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^j_X$ le faisceau-des formes différentielles méromorphes de degré j à pôle le long de Y.

2.1. Définitions

Definition 1. — On appelle fibré méromorphe sur X à pôle le long de Y un faisceau cohérent $\overline{F}$ de $\mathscr{O}_X[*Y]$ -Modules.

On dit que $\overline{F}$ est effectif s'il existe un faisceau G cohérent de $\mathscr{O}_X$-Modules tel que :

$$\overline{F} = \mathscr{O}_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X} G$$

Une connexion méromorphe est un couple $(\overline{F}, \nabla)$ formé d'un fibré méromorphe $\overline{F}$ et d'une connexion

$$\nabla : \overline{F} \longrightarrow \Omega^1_X[*Y] \otimes_{\mathscr{O}_X[*Y]} \overline{F}$$

Un prolongement méromorphe d'une connexion (F, ∇) sur $U = X - Y$ est une connexion méromorphe $(\overline{F}, \nabla)$ munie d'un isomorphisme de sa restriction à $X - Y$ sur (F, ∇) :

$$\psi : (\overline{F}, \nabla) \mid_{X-Y} \longrightarrow (F, \nabla)$$

(1) bien sûr j'anticipe... voir ci-dessous !