

**LE THÉORÈME DE POSITIVITÉ,  
LE THÉORÈME DE COMPARAISON  
ET LE THÉORÈME D’EXISTENCE DE RIEMANN**

*par*

Zoghman Mebkhout

---

**Résumé.** — Dans ce cours on définit le complexe d’irrégularité d’un complexe holonome le long d’un espace analytique complexe. On montre que c’est un faisceau pour un module holonome et une hypersurface. On montre le critère fondamental de la régularité qui permettra d’établir la nullité du faisceau d’irrégularité. On montre que toutes les propriétés fonctorielles de la régularité sont des conséquences du critère fondamental. On montre le théorème d’existence du type de Riemann en construisant explicitement des réseaux canoniques à l’aide du théorème d’extension des faisceaux analytiques cohérents. On montre enfin le théorème d’existence du type de Frobenius concernant les complexes holonomes d’ordre infini.

**Abstract (The Positivity Theorem, the Comparison Theorem and Riemann’s Existence Theorem)**

In this lecture we define the irregularity complex of an holonomic complex along a complex analytic space and we prove that it is a sheaf for an holonomic module and an hypersurface. We prove the fundamental regularity criterium giving the vanishing of the irregularity sheaf. We prove that all the functorial properties of the regularity are consequences of the fundamental criterium. We prove the existence theorem of Riemann type by building explicit lattices using the extension theorem for analytic coherent sheaves. We finally prove the existence theorem of Frobenius type for holonomic complexes of infinite order.

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 12, 14, 32.

**Mots clefs.** — Positivité, faisceau d’irrégularité, critère fondamental de la régularité, théorème de comparaison, réseau canonique.

### Table des matières

1. Introduction .....	170
Références bibliographiques citées dans l'introduction .....	183
2. Fondement de la Théorie des $\mathcal{D}_X$ -modules .....	185
2.1. Le faisceau des opérateurs différentiels .....	185
2.2. Cas d'une variété analytique complexe, cohérence, cycles caractéristiques, holonomie, dualité .....	186
2.3. Cas d'une variété algébrique non singulière .....	189
2.4. Cristaux de Grothendieck et $\mathcal{D}_X$ -modules .....	191
2.5. Les foncteurs de localisation et de cohomologie locale algébrique, suite de Mayer-Vietoris .....	195
2.6. Commutation de la cohomologie locale algébrique avec l'image inverse .....	197
2.7. Solutions formelles d'un $\mathcal{D}_X$ -module .....	198
3. Le Théorème de Positivité de l'Irrégularité .....	202
3.1. Introduction .....	202
3.2. La Catégorie des Coefficients Constructibles $D_c^b(\mathbb{C}_X)$ , Constructibilité des complexes de de Rham et des solutions holomorphes d'un complexe holonome .....	203
3.3. Le Théorème de Dualité Locale .....	204
3.4. Le Complexe d'Irrégularité .....	206
3.5. Le Théorème de Positivité .....	208
3.6. Stabilité du Complexe d'Irrégularité par Images Directes Propres .....	221
4. Le Critère Fondamental de la Régularité .....	223
4.1. Introduction .....	223
4.2. La Catégorie des Complexes Holonomes Réguliers $D_{hr}^b(\mathcal{D}_X)$ .....	224
4.3. Le Critère Fondamental de la Régularité .....	227
5. Le Théorème global de Comparaison pour la Cohomologie de de Rham .....	239
5.1. Le théorème global de comparaison pour la cohomologie de de Rham : cas des coefficients constants .....	239
5.2. Le théorème global de comparaison pour la cohomologie de de Rham : cas des coefficients lisses .....	242
6. Stabilité de la catégorie des complexes holonomes réguliers par Image inverse, Produits tensoriels interne et externe .....	243
6.1. Image inverse .....	243
6.2. Produits tensoriels externe et interne .....	246
7. Stabilité de la Catégorie des complexes holonomes réguliers par Dualité .....	251
7.1. Stabilité par dualité .....	252
7.2. Image inverse extraordinaire .....	255
7.3. Pleine fidélité du foncteur de de Rham .....	255

8. Résumé .....	257
8.1. Résultats de Finitude .....	257
8.2. Résultats de Positivité .....	257
8.3. Résultats de Régularité .....	258
9. La catégorie des complexes holonomes réguliers : cas algébrique	259
10. Le Théorème d'Existence de type de Riemann .....	263
10.1. Introduction .....	263
10.2. Le Théorème de prolongement des faisceaux analytiques cohérents .....	266
10.3. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les modules lisses à connexion .....	271
10.4. Holonomie et régularité des images directes locales par une fonction d'un module holonome régulier .....	276
10.5. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les coefficients analytiquement constructibles .....	278
Passage du local au global, première étape : recollement des objets .....	282
Passage du local au global, deuxième étape : recollement des morphismes .....	283
10.6. Le théorème d'existence de type de Riemann pour les coefficients algébriquement constructibles .....	286
11. Le Théorème d'Existence de type de Frobenius pour les coefficients holonomes d'ordre infini .....	288
11.1. Introduction .....	288
11.2. Le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini .....	288
11.3. Fidèle platitude de l'extension $\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_X^\infty$ .....	290
11.4. Théorème de dualité pour les $\mathcal{D}_X^\infty$ -modules .....	291
11.5. Équivalence de catégories entre la catégorie des complexes holonomes d'ordre infini et la catégorie des complexes constructibles .....	298
11.6. Le module d'Irrégularité .....	301
Références .....	305
Liste des notations .....	306
Index .....	308

Formulaire des Six opérations de Grothendieck et leurs compatibilités

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \\ \otimes \\ \mathbb{R} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{RHom} \\ \text{RHom}(\mathbb{R}, -) \\ \text{Rf}_* \quad \text{Lf}^* \\ \text{Rf}_! \quad \text{Rf}^! \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{RHom}, \Gamma_x \\ \Gamma_x h_x^* \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1} \otimes \mathbb{F} \simeq \mathbb{F} \otimes \mathbb{1} \simeq \mathbb{F} \\ \mathbb{F} \otimes \mathbb{G} \simeq \mathbb{F} \otimes \mathbb{G} \\ (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R} \otimes \mathbb{H}) \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\tau_1 \simeq \text{id}} \\ \xrightarrow{\tau_2 \otimes \tau_3 \simeq \tau_2 \otimes \tau_3} \\ \xrightarrow{\tau_4 \otimes \tau_5 \simeq \tau_4 \otimes \tau_5} \end{array} \begin{array}{l} \text{RHom}(\mathbb{1}, \mathbb{F}) \simeq \mathbb{F} \\ \text{RHom}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \simeq \mathbb{R} \otimes \text{RHom}(\mathbb{R}, \mathbb{H}) \\ \text{RHom}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}, \mathbb{H}) \simeq \text{RHom}(\mathbb{F}, \text{RHom}(\mathbb{G}, \mathbb{H})) \end{array} \quad h_1 \simeq \text{id}$$

$$\text{RHom}(\mathbb{F}, \mathbb{G} \otimes \mathbb{H}) \simeq \text{RHom}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \otimes \mathbb{H}$$

$$\text{RHom}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \simeq \text{R}\Gamma_x(\text{RHom}(\mathbb{F}, \mathbb{G}))$$

$$H_x(\mathbb{F}, \mathbb{G}) = H \cdot \text{RHom}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) = H_x(\text{RHom}(\mathbb{F}, \mathbb{G}))$$

$$\begin{array}{c} \text{Lf}^* \simeq \text{id} \\ \text{Lf}^*(\mathbb{F} \otimes \mathbb{G}) \simeq \text{Lf}^*\mathbb{F} \otimes \text{Lf}^*\mathbb{G} \end{array} \quad \text{Lf}^*\mathbb{G} = \text{L}\Gamma_x \cdot \text{Lf}^* \quad \text{R}\Gamma_x(\mathbb{F}) = \text{RHom}(\mathbb{1}, \mathbb{F})$$

$$\begin{array}{c} X \quad \mathbb{F} \\ \downarrow \downarrow \\ Y \quad \mathbb{G} \end{array} \quad \text{Rf}_*(\text{RHom}_x(\mathbb{F}, \mathbb{G})) \simeq \text{RHom}_y(\mathbb{G}, \text{Rf}_*(\mathbb{F}))$$

$$\left[ H_x(\mathbb{F}^* \mathbb{G}, \mathbb{F}) \simeq H_x(\mathbb{G}, \text{Rf}_*(\mathbb{F})) \right]$$

$$\left[ \text{Rf}_* \text{RHom}_x(\mathbb{F}, \text{Rf}^! \mathbb{G}) \simeq \text{RHom}_y(\text{Rf}_* \mathbb{F}, \mathbb{G}) \right]$$

$$\left[ H_x(\mathbb{F}, \text{Rf}^! \mathbb{G}) \simeq H_y(\text{Rf}_* \mathbb{F}, \mathbb{G}) \right]$$

$$\left[ \text{Rf}_*(\mathbb{F} \otimes_x \text{Lf}^! \mathbb{G}) \simeq \text{Rf}_*(\mathbb{F}) \otimes_y \mathbb{G} \right]$$

$$\text{Rf}_* \circ \text{Lf}^! \simeq \text{Rf}_! \circ \text{Lf}^*$$

$$\text{Rf}_* \circ \text{Lf}^* \simeq \text{Rf}_! \circ \text{Lf}^!$$

$$\text{Rf}_* \circ \text{Lf}^! \simeq \text{Rf}_! \circ \text{Lf}^*$$

$$\text{Rf}_* \circ \text{Lf}^* \simeq \text{Rf}_! \circ \text{Lf}^!$$

$$\text{Rf}_*(\mathbb{F} \otimes_x \text{Lf}^! \mathbb{G}) \simeq \text{Rf}_*(\mathbb{F}) \otimes_y \mathbb{G}$$

$$\begin{array}{ccc} F & X & \xleftarrow{h} & X' \\ \downarrow f & & & \downarrow f' \\ & Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Lg^* Rf_!(F) \simeq Rf'_! Lh^*(F) \\ Rf_* Rg_* \simeq Rh_* Rj'_! \end{array} \right.$$

$$Lj^* Rj_!(F) \iff Rj'_* Lh^*(F) \quad \text{iso si } g \text{ lisse}$$

$$Lf^*(F) \xleftarrow{\text{refl. in } \Omega_{X/Y}} Lj^*(\mathbb{1}) \otimes Lj'_*(F)$$

$$\begin{array}{ccc} F & X & \xrightarrow{g'} & X' \\ \downarrow f & & & \downarrow f' \\ S & Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

$$F \boxtimes G \simeq Lj^*(F) \otimes Lj'^*(G)$$

$$Rh_*(F \boxtimes G) \simeq Rh_*(F) \otimes Rh_{g'}(G)$$

Künneth

iso si  $f$  lisse  
 $f: X \rightarrow Y, X, Y$  lisses  
 $Y'$  lisse

Notes de Alexandre Grothendieck d'un mini cours donné à Mormoiron dans le Vaucluse (France) en mai 1983 donnant un formulaire des six opérations cohomologiques et de leurs compatibilités.