Séminaires & Congrès
8, 2004, p. 165–310

LE THÉORÈME DE POSITIVITÉ, LE THÉORÈME DE COMPARAISON ET LE THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN

par

Zoghman Mebkhout

Résumé. — Dans ce cours on définit le complexe d'irrégularité d'un complexe holonome le long d'un espace analytique complexe. On montre que c'est un faisceau pour un module holonome et une hypersurface. On montre le critère fondamental de la régularité qui permettra d'établir la nullité du faisceau d'irrégularité. On montre que toutes les propriétés fonctorielles de la régularité sont conséquences du critère fondamental. On montre le théorème d'existence du type de Riemann en construisant explicitement des réseaux canoniques à l'aide du théorème d'extension des faisceaux analytiques cohérents. On montre enfin le théorème d'existence du type de Frobenius concernant les complexes holonomes d'ordre infini.

***Abstract* (The Positivity Theorem, the Comparison Theorem and Riemann's Existence Theorem)**

In this lecture we define the irregularity complex of an holonomic complex along a complex analytic space and we prove that it is a sheaf for an holonomic module and an hypersurface. We prove the fondamental regularity criterium giving the vanishing of the irregularity sheaf. We prove that all the fonctorial properties of the regularity are consequences of the fondamental criterium. We prove the existence theorem of Riemann type by building explicit lattices using the extension theorem for analytic coherent sheaves. We finally prove the existence theorem of Frobenius type for holonomic complexes of infinite order.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 12, 14, 32.
Mots clefs. — Positivité, faisceau d'irrégularité, critère fondamental de la régularité, théorème de comparaison, réseau canonique.

Table des matières

Formulaire des Six opérations de Grothendieck et leurs compatibilités

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \overset{L}{\otimes} & R\underline{Hom} \\ \overset{L}{\otimes}\mathcal{F} & R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -) \\ \hline Rf_* & Lf^* \\ Rf_! & Rf^! \end{array} \right. \qquad R\mathcal{H}om,\ \Gamma_X \qquad \tau_{\mathcal{F}} \quad h_{\mathcal{F}}$$

$\tau_1 \simeq id$ $\qquad h_1 \simeq id$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \otimes \mathcal{F} \simeq \mathcal{F} \otimes 1 \simeq \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \\ (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{F} \otimes (\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}) \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} R\underline{Hom}(1, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \\ \tau_F \otimes \tau_G \simeq \tau_G \otimes \tau_F \\ \tau_{F \otimes G} \simeq \tau_F \otimes \tau_G \end{array}$$

$$R\underline{Hom}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, H) \simeq R\mathcal{H}om(F, R\mathcal{H}om(G, H))$$

$$R\underline{Hom}(F, G \overset{L}{\otimes} H) \longleftarrow R\underline{Hom}(F, G) \otimes H$$

$$RHom(F, G) \simeq R\Gamma_X(R\underline{Hom}(F, G))$$

$$Hom(F, G) = H^0 RHom(F, G) = H^0_X(R\underline{Hom}(F, G))$$

$Lf^*(1) \simeq 1_X$

$Lf^*(F \otimes_Y G) \simeq Lf^*F \otimes Lf^*G \qquad Lf^*\tau_G = \tau_{Lf^*F} \circ Lf^* \qquad \longrightarrow R\Gamma_X(F) = R\mathcal{H}om(1, F)$

$$R\Gamma_X \simeq R\Gamma_Y Rf_*$$

$$\begin{array}{cc} X & F \\ \downarrow f & \\ Y & G \end{array} \qquad Rf_*(R\underline{Hom}_X(Lf^*G, F)) \simeq R\underline{Hom}_Y(G, Rf_*(F))$$

$$[\ Hom(Lf^*G, F) \simeq Hom(G, Rf_*F)\ ]$$

$$\boxed{Rf_* R\underline{Hom}_X(F, Rf^!G) \simeq R\underline{Hom}_Y(Rf_!F, G)}$$

$$[\ Hom_X(F, Rf^!G) \simeq Hom_Y(Rf_!F, G)\ ]$$

$$\boxed{Rf_!(F \otimes_X Lf^*(G)) \simeq Rf_!(F) \otimes_Y G}$$

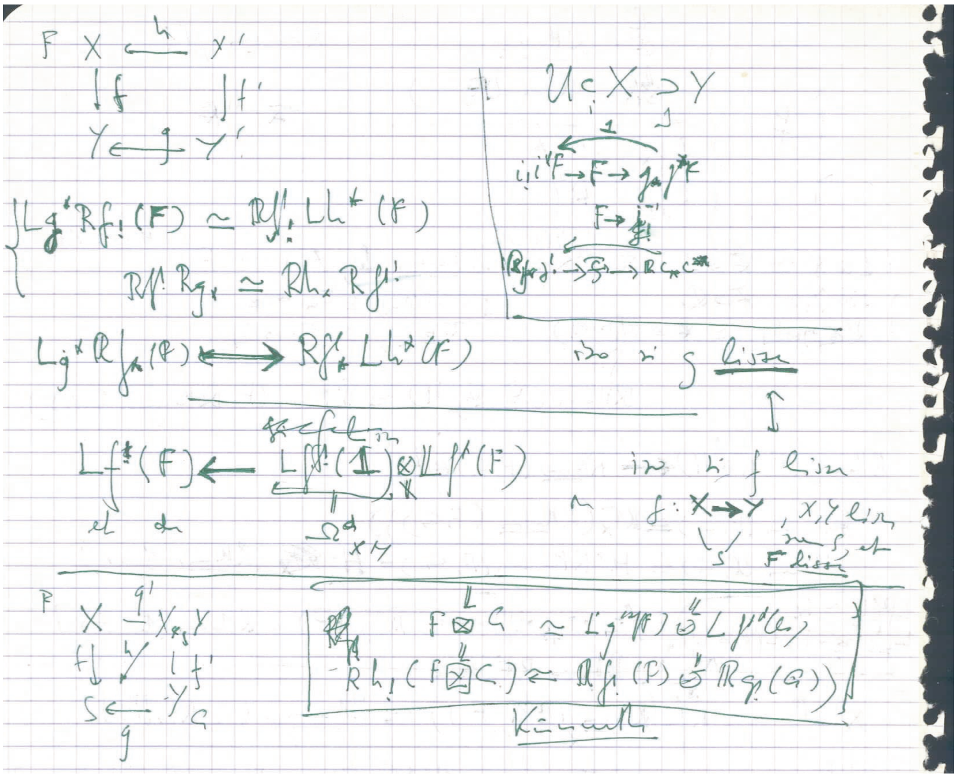
$$Rf_! \circ \tau_{Lf^*(G)} \simeq \tau_G \circ Rf_!$$

$$h_{Lf^*G} \circ Rf^! \simeq Rf^! \circ h_G$$

$$R\underline{Hom}_X(Lf^*G, Rf^!H) \simeq Rf^!(R\underline{Hom}(G, H))$$

$$Rf_*(F \otimes_X Lf^*G) \longleftarrow Rf_*(F) \otimes_Y G$$

pas iso



Notes de Alexandre Grothendieck d'un mini cours donné à Mormoiron dans le Vaucluse (France) en mai 1983 donnant un formulaire des six opérations cohomologiques et de leurs compatibilités.