*Séminaires & Congrès*
**8**, 2004, p. 311–389

# LE THÉORÈME DE COMPARAISON POUR LES CYCLES ÉVANESCENTS

*par*

Philippe Maisonobe & Zoghman Mebkhout

***Résumé.*** — Le but de cet article est de démontrer le théorème de comparaison pour les cycles évanescents. Nous montrons la constructibilité du complexe des cycles évanescents. Nous montrons que les solutions multiformes d'un complexe holonome sont de détermination finie. Nous montrons que les solutions multiformes d'un complexe holonome régulier sont à croissance modérée. Nous montrons que le gradué associé à la $V$-filtration d'un module spécialisable commute à la dualité. Nous utilisons tous les résultats précédents pour montrer le théorème de comparaison et nous illustrons les résultats généraux à l'aide de l'exemple d'une fonction monomiale.

***Abstract* (The Comparison Theorem for vanishing cycles).** — The goal of this article is to prove the comparison theorem for the vanishing cycles. We prove the constructibility of the vanishing cycle complex. We prove that the multivalued solutions of an holonomic complex are of finite determination. We prove that the multivalued solutions of a regular holonomic complex are tame. We prove that the graded module with respect to the $V$-filtration of a specializable module commute with duality. We use all the previous results to prove the comparison theorem and we illustrate the general results in the case of a monomial function.

## Table des matières

1. Introduction .......... 312
2. Constructibilité du complexe des cycles évanescents .......... 314
   2.1. Définition du complexe des cycles évanescents .......... 314
   2.2. Le théorème de constructibilité du complexe des cycles évanescents .......... 318
3. Le complexe des solutions multiformes d'un complexe holonome 320
   3.1. Les solutions multiformes d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome sont de détermination finie .......... 320

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 12, 14, 32.
***Mots clefs.*** — Monodromie, cycles évanescents, modules spécialisables, $V$-filtration, dualité, régularité, théorème de comparaison.

© Séminaires et Congrès 8, SMF 2004

3.2. La catégorie des complexes de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers $D^b_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ ........ 324
3.3. Les solutions multiformes d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier sont à croissance modérée ........ 326
4. La théorie de la $V$-filtration ........ 328
4.1. La $V$-filtration du faisceau $\mathscr{D}_X$ ........ 328
4.2. Les $\mathscr{D}_X$-modules spécialisables le long de $Y$ ........ 335
4.3. La filtration canonique d'un module spécialisable ........ 339
4.4. Exemples et premières propriétés ........ 343
4.5. Les $\mathscr{D}_X$-modules élémentaires ........ 346
4.6. La $V$-Filtration et la dualité ........ 362
4.7. Les gradués d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome ........ 365
5. Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier ........ 371
5.1. Cas d'un exposant non nul ........ 371
5.2. Cas d'un exposant nul ........ 372
5.3. Cas général ........ 373
6. Exemple d'une fonction monomiale (avec la collaboration de T. Torrelli) ........ 375
6.1. Équations fonctionnelles ........ 376
6.2. $V$-filtration ........ 378
6.3. Calcul des solutions holomorphes ........ 385
6.4. Le cas d'une fonction d'une seule variable ........ 387
Références ........ 388

## 1. Introduction

Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe. Le théorème de la fibration de Milnor [**Mi**] définit les systèmes locaux $R^i f_* \mathbb{C}$ sur le disque épointé assez petit. D'où les représentations de monodromie, action d'un lacet autour de l'origine dans le sens trigonométrique sur la cohomologie de la fibre de Milnor. Le théorème de la monodromie dit que ces représentations sont quasi-unipotentes : les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité. Le théorème de la monodromie a été obtenu par A. Grothendieck en géométrie arithmétique comme conséquence des propriétés galoisiennes des racines de l'unité ([**G**], p. 228). Il a attiré de nombreux mathématiciens et reçu plusieurs démonstrations : transcendante [**Gr**], arithmétique [**Ka1**], géométrique [**Le**].

À la série convergente $f$, on associe algébriquement son polynôme de Bernstein-Sato $b_f \in \mathbb{C}[s]$. Les premiers exemples non triviaux de polynômes $b_f$ dont on a disposé avaient des racines rationnelles. Ce fait remarquable fit penser à B. Malgrange qu'il avait un lien étroit entre le théorème de la monodromie et la rationalité des zéros de $b_f$. Précisément, Malgrange montra [**M1**] dans le cas d'une singularité isolée que les exposants de la monodromie, c'est-à-dire les logarithmes de ses valeurs propres, sont égaux modulo les entiers aux racines du polynôme $b_f$. Autrement dit la quasi-unipotence de la monodromie est équivalente à la rationalité des zéros de $b_f$. La situation d'une singularité isolée est facilitée par le fait que la cohomologie en degrés $> 0$ de la fibre de Milnor soit concentrée en un seul degré.

Le polynôme d'une fonction définissant un diviseur à croisements normaux est facile à calculer. À partir de là M. Kashiwara a montré dans [**K1**] que $b_f$ divise un produit de translatés du polynôme obtenu par une résolution plongée des singularités de $f$ ; en particulier les racines de $b_f$ sont rationnelles. Cette démonstration est algébro-géométrique et reste valable sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Nous comprenons aujourd'hui cette démonstration comme un exemple de compatibilité de l'image directe par un morphisme propre avec le gradué associé à la $V$-filtration qui est démontrée en toute généralité dans l'article [**M-S**]. En fait, ce type de démonstration apparaît déjà dans l'article de N. Katz [**Ka2**].

L'approche algébro-géométrique démontre la rationalité des zéros de $b_f$, mais non son équivalence avec la quasi-unipotence de la monodromie. Une fois mise en évidence l'équivalence de catégories entre la catégorie des modules holonomes réguliers et la catégorie de faisceaux au sens dérivé (dits pervers dans la littérature), B. Malgrange a repris la question [**M2**] en construisant à partir de $f$ un module holonome régulier muni d'une action de la monodromie et dont le complexe de de Rham est isomorphe au complexe $\mathbf{R}\Psi_f(\mathbb{C}_X)$ des cycles évanescents de Grothendieck-Deligne [**SGA7**]. Son résultat réalise de façon très précise alors son idée originale : la quasi-unipotence de la monodromie d'une singularité est équivalente à la rationalité des zéros de son polynôme de Bernstein-Sato. Sa démonstration consistait à prendre une image directe locale délicate sur le disque.

Dans [**K2**] Kashiwara a indiqué que la démonstration de Malgrange se généralisait au cas d'un module holonome régulier, toujours en prenant une image directe locale sur un disque. Il introduit l'idée importante de résoudre un module holonome par des modules élémentaires. Mais les détails des démonstrations, qui sont loin d'être évidents n'ont jamais paru.

Dans [**S**] C. Sabbah a prolongé le travail de Kashiwara en étudiant le comportement par dualité du gradué associe à un module spécialisable le long d'une hypersurface. Mais le théorème de comparaison n'était pas non plus démontré.

La première démonstration du théorème de comparaison pour les cycles évanescents est faite dans l'article [**M-S**] à l'aide de la notion de régularité issue du théorème de comparaison, qui est au coeur du problème, et du théorème de la résolution des singularités. Dans ce travail on introduit l'idée importante d'exprimer le gradué associé à la $V$-filtration d'un module spécialisable le long d'une hypersurface à l'aide d'une image inverse extraordinaire d'un module tordu convenablement, qui permet de montrer la régularité de ces gradués dans le cas holonome et le théorème de comparaison et s'insère dans le formalisme des opérations cohomologiques. Le problème est alors devenu de nature locale à la source, ce qui est aussi essentiel.

Dans ce cours, nous reprenons la question en donnant des démonstrations complètes des points clefs à l'aide des méthodes les plus récentes introduites dans l'article [**Me2**]. Au chapitre 2, nous démontrons géométriquement la constructibilité du complexe des cycles évanescents d'un complexe constructible sans le théorème de résolution des singularités, ni le théorème de fibration de Milnor. Dans le chapitre 3 nous montrons que les solutions multiformes d'un module holonome sont de détermination finie et que les solutions multiformes d'un module holonome régulier sont à croissance modérée. Dans le chapitre 4, nous reprenons complètement le fondement de la théorie de la $V$-filtration et précisons la compatibilité de la dualité avec son gradué. Au chapitre 5, nous démontrons le théorème de comparaison pour les cycles évanescents à partir du critère fondamental de la régularité qui, rappelons le encore une fois, est indépendant du théorème de la résolution des singularités. Dans le chapitre 6 en collaboration avec T. Torrelli nous explicitons pour illustrer les résultats généraux le cas déjà intéressant et non trivial d'une fonction monomiale. Le lecteur est invité à expliciter le cas de singularités un peu plus compliquées pour pénétrer davantage dans le calcul.

## 2. Constructibilité du complexe des cycles évanescents

**2.1. Définition du complexe des cycles évanescents.** — Une situation type est la suivante. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe. On choisit une fois pour toute une coordonnée $z$ sur le plan complexe. On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ et :

$$p\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad \tau + it \longmapsto \exp(2i\pi(\tau + it))$$

l'application exponentielle qui fait apparaître $\mathbb{C}$ comme revêtement universel du plan épointé. Fixons quelques notations à l'aide du diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "f"] & \widetilde{X}^* \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ 0 \arrow[r, "i"] & \mathbb{C} & \mathbb{C}^* \arrow[l, "j"'] & \mathbb{C} \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

L'application $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ est l'inclusion dans $X$ de la fibre $Y$ de $f$ au-dessus de l'origine dans $\mathbb{C}$, $X^* \overset{j}{\hookrightarrow} X$ est celle dans $X$ du complémentaire de $Y$ et $(\widetilde{X}^*, p, \widetilde{f})$ le produit fibré au-dessus de $\mathbb{C}^*$ de $X^*$ et de $\mathbb{C}$.

***Définition 2.1–1***. — Soit $\mathscr{F}$ un complexe de $D^b(\mathbb{C}_X)$. Le complexe des cycles proches de Grothendieck-Deligne est le complexe :

$$\Psi_f(\mathscr{F}) := i^{-1}\mathbf{R}j_*p_*p^{-1}j^{-1}(\mathscr{F}).$$

Le foncteur des cycles proches $\Psi_f$ ainsi défini est par construction un foncteur de la catégorie $D^b(\mathbb{C}_X)$ vers la catégorie $D^b(\mathbb{C}_Y)$.

Considérons le morphisme de translation sur $\mathbb{C}$ :

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau + it \longmapsto \tau + 1 + it$$

Il vérifie $p \circ T = p$. Il en résulte que le produit fibré $\widetilde{X^*}$ est muni d'un automorphisme au-dessus de $X^*$ dit *automorphisme de monodromie* ; on le note également $T$.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ et $\Omega$ un ouvert de $\widetilde{X}^*$. On considère le morphisme naturel d'adjonction :

$$\Gamma(\Omega, (jp)^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(T^{-1}(\Omega), T^{-1}(jp)^{-1}\mathscr{F}) = \Gamma(T^{-1}(\Omega), (jp)^{-1}\mathscr{F})$$

Si $T^{-1}(\Omega) = \Omega$, on obtient ainsi un morphisme naturel :

$$\Gamma(\Omega, (jp)^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\Omega, (jp)^{-1}\mathscr{F})$$

Ainsi, pour tout ouvert $U$ de $\mathbb{C}$, on a un morphisme :

$$\Gamma(U, (jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(U, (jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F})$$

Cela permet de définir un morphisme

$$(jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow (jp)_*(jp)^{-1}\mathscr{F}$$

puis après dérivation un morphisme

$$\Psi_f(\mathscr{F}) \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{F})$$

appelé morphisme de monodromie, que l'on note toujours $T$.

D'autre part, le morphisme d'adjonction :

$$\mathscr{F} \longrightarrow \mathbf{R}j_*p_*p^{-1}j^{-1}(\mathscr{F})$$

fournit un morphisme :

$$i^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{F})$$

qui commute à l'action de la monodromie :

$$\begin{tikzcd} \Psi_f(\mathscr{F}) \arrow[rr, "T"] & & \Psi_f(\mathscr{F}) \\ & i^{-1}\mathscr{F} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

***Définition 2.1–2***. — On définit le *complexe des cycles évanescents* $\Phi_f(\mathscr{F})$ comme le cône du morphisme naturel :

$$i^{-1}\mathscr{F} \longrightarrow \Psi_f(\mathscr{F})$$

Le morphisme naturel can: $\Psi_f(\mathscr{F}) \to \Phi_f(\mathscr{F})$ est appelé *morphisme canonique*.