Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 155–172

SCINDEMENT D'ASSOCIATIVITÉ ET ALGÈBRES DE HOPF

par

Jean-Louis Loday

En hommage à Jean Leray

Résumé. — On montre que certaines algèbres associatives dont le produit se scinde en somme de plusieurs opérations et qui sont libres, en un certain sens, pour ces opérations, possèdent une structure d'algèbre de Hopf. On montre que l'opérade des algèbres dendriformes joue un rôle particulier dans ce contexte, puis on donne de nombreux exemples.

***Abstract* (Splitting associativity and Hopf algebras).** — We show that some associative algebras whose product splits up into the sum of several operations and are free, in a certain sense, with respect to these operations, admit a Hopf algebra structure. We show that the operad of dendriform algebras play a crucial role in this context, and we give numerous examples.

Introduction

Dans leur célèbre article sur les algèbres de Hopf, John Milnor et John Moore interprètent le théorème 8 de l'article [**Leray**] de Jean Leray de la façon suivante (*cf.* théorème 7.5 de [**MM**]) : si une algèbre commutative unitaire A possède une co-opération unitaire, *i.e.* un homomorphisme d'algèbres associatives

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$

compatible avec l'unité, alors A est libre comme algèbre associative et commutative (c'est-à-dire est une algèbre symétrique). Ce résultat peut s'étendre à d'autres types d'algèbres à condition de remplacer le produit tensoriel par la somme (colimite) dans cette catégorie d'algèbres (*cf.* Fresse [**Fr**] et Oudom [**O**]).

Le but de ce papier est, en un certain sens, de renverser la situation et de montrer que, pour certains types d'algèbres, on peut construire un coproduit sur l'algèbre libre. Dans le cas classique des algèbres associatives, l'algèbre libre sur l'espace vectoriel V

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 16A24, 16W30, 18D50.
Mots clefs. — Algèbre de Hopf, opérade, dendriforme, série génératrice, nombre de Catalan.

est l'algèbre tensorielle $T(V)$ (algèbre des polynômes non commutatifs sur une base de V). On sait que c'est aussi une algèbre de Hopf pour le coproduit construit à partir des shuffles. Comme conséquence importante de cette propriété les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie sont des algèbres de Hopf. En pratique on peut utiliser le fait que $T(V)$ est libre pour démontrer la coassociativité du coproduit shuffle sans calculs combinatoires fastidieux. Nous montrons dans ce papier que cette technique peut être étendue à certains types d'algèbres présentant un « scindement d'associativité ». Nous montrons que, lorsque certaines propriétés de cohérence existent entre les relations définissant le type d'algèbre et l'unité, alors l'algèbre libre pour ce type (dûment augmentée) est une algèbre de Hopf. Dans le cas où le type d'algèbres est défini par deux opérations dont la somme est une opération associative (scindement d'associativité), on constate que les relations doivent être combinaisons linéaires de 3 relations particulières. Celles-ci sont exactement les relations des « algèbres dendriformes ».

Dans le premier paragraphe on explique ce qu'on entend par « scindement d'associativité » et « cohérence des relations avec l'unité ». On montre le rôle primordial des algèbres dendriformes pour ce problème. Dans le deuxième paragraphe on démontre l'existence d'une structure d'algèbre de Hopf sur les algèbres libres pour les types d'algèbres satisfaisant aux conditions de cohérence. Les deux premiers paragraphes sont restreints aux types d'algèbres ayant deux opérations génératrices sans symétrie. On peut étendre le résultat à d'autres types d'algèbres, ce qu'on fait dans le troisième paragraphe, écrit avec la terminologie des opérades qui est le langage adapté dans ce domaine. L'existence du coproduit sur l'algèbre libre a pour application la généralisation de la notion de convolution.

Outre les algèbres dendriformes, il se trouve que la plupart des nouveaux types d'algèbres avec scindement d'associativité apparus dernièrement vérifient effectivement les propriétés de cohérence : algèbres 2-associatives, trigèbres dendriformes, algèbres pré-dendriformes, algèbres diptères, quadrigèbres, algèbres magmatiques. Après avoir donné la présentation de ces types d'algèbres, on indique ce qui est connu sur leur algèbre libre dans le quatrième paragraphe.

Dans le dernier paragraphe nous abordons le problème de la détermination de l'opérade des primitifs.

Je remercie María Ronco et Teimuri Pirashvili pour les nombreuses conversations et idées échangées sur le sujet, et François Lamarche pour une remarque pertinente.

Notation. — Dans ce papier K est un corps de caractéristique quelconque. Par espace ou espace vectoriel on entend un espace vectoriel sur K. Le produit tensoriel sur K des espaces V et W est noté $V \otimes W$.

1. Scindement d'associativité et cohérence unitaire

1.1. Définition. — Soit A une algèbre associative (non unitaire) dont on note $*$ le produit. On dira qu'il y a *scindement d'associativité* lorsque cette opération $*$ est somme de deux opérations :

$$x * y = x \prec y + x \succ y, \tag{0}$$

que l'on qualifie respectivement de *gauche* et *droite*, et lorsque l'associativité de $*$ est une conséquence des relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$.

L'exemple suivant va jouer un rôle primordial dans notre problématique.

***1.2. Exemple* (algèbres dendriformes)**. — Par définition une *algèbre dendriforme* (*cf.* [**L2**]), encore appelée digèbre dendriforme, est un espace vectoriel A muni de deux opérations *gauche* et *droite* satisfaisant aux relations

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y * z), \tag{R1}$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z), \tag{R2}$$

$$(x * y) \succ z = x \succ (y \succ z), \tag{R3}$$

Par addition des relations on constate que l'opération $*$ est associative, on a donc bien scindement d'associativité.

1.3. Compatibilité entre relations et action de l'unité. — Toute algèbre associative A peut être rendue unitaire formellement en posant $A_+ = K \cdot 1 \oplus A$ (algèbre augmentée) avec le produit associatif induit par celui de A, 1 étant l'unité pour $*$. On se pose la question de savoir si, lorsque le produit associatif est scindé, on peut étendre les opérations $\prec$ et $\succ$ à tout A_+. On doit avoir $a = 1 * a = 1 \prec a + 1 \succ a$ d'une part et $a = a * 1 = a \prec 1 + a \succ 1$ d'autre part. Faisons les choix suivants pour l'action de 1 sur $a \in A$:

$$1 \prec a = 0, \quad 1 \succ a = a, \quad a \prec 1 = a, \quad a \succ 1 = 0\ . \tag{†}$$

On ne peut pas étendre $\prec$ et $\succ$ à K donc $1 \prec 1$ et $1 \succ 1$ ne sont pas définis. On voudrait que l'extension des opérations $\prec$ et $\succ$ à l'algèbre unitaire A_+ par les formules ci-dessus soit *compatible*, *i.e.* que les relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$ soient valables sur A_+ pour autant que les termes soient définis. On dira alors que A_+ est une *algèbre augmentée*.

Dans un premier temps on suppose que les relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$ sont quadratiques et régulières (voir paragraphe 3.1). Ceci signifie que les relations sont des combinaisons linéaires de monômes du type $(x \circ_1 y) \circ_2 z$ et du type $x \circ_1 (y \circ_2 z)$ où $\circ_1$ et $\circ_2$ sont soit $\prec$ soit $\succ$ (il y a donc 8 monômes possibles). On remarquera que les algèbres dendriformes sont de ce type. Elles ont été étudiées dans [**L2**].

1.4. Proposition. — *L'extension des opérations $\prec$ et $\succ$ à l'algèbre unitaire A_+ est compatible si et seulement si les relations satisfaites par $\prec$ et $\succ$ sont des combinaisons linéaires des relations* (R1)*,* (R2) *et* (R3) *décrites ci-dessus.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{aligned}\alpha(x \prec y) \prec z + \beta(x \prec y) \succ z + \gamma(x \succ y) \prec z + \delta(x \succ y) \succ z \\ = \alpha' x \prec (y \prec z) + \beta' x \prec (y \succ z) + \gamma' x \succ (y \prec z) + \delta' x \succ (y \succ z)\end{aligned}$$

une relation où α, β, etc, sont des scalaires. En remplaçant x, resp. y, resp. z par 1, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma = \gamma', \quad \delta = \delta',\\ \alpha = \beta', \quad \beta = \delta',\\ \alpha = \alpha', \quad \gamma = \gamma',\end{aligned}$$

respectivement. En effet, par exemple pour $x = 1$, on obtient

$$\gamma(b \prec c) + \delta(b \succ c) = \gamma'(b \prec c) + \delta'(b \succ c)$$

pour tous $b, c \in A_+$, d'où l'égalité de la première ligne.

On en déduit que la relation de départ est de la forme

$$\begin{aligned}\alpha\big((x \prec y) \prec z - x \prec (y \prec z) - x \prec (y \succ z)\big) + \gamma\big((x \succ y) \prec z - x \succ (y \prec z)\big)\\ + \beta\big((x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z - x \succ (y \succ z)\big) = 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire une combinaison linéaire des trois relations (Ri). □

On examine plusieurs types de digèbres dans le second paragraphe.

2. Structure d'algèbre de Hopf sur les algèbres libres

On considère un type d'algèbres $\mathcal{P}$ ayant deux opérations génératrices $\prec$ et $\succ$ et dont les relations sont des combinaisons linéaires de (R1), (R2) et (R3). On suppose que l'on est en présence d'un scindement d'associativité, c'est-à-dire que l'opération $*$, définie par la formule (0), est associative.

Soient A et B deux algèbres de type $\mathcal{P}$, dont on note A_+, B_+ la $\mathcal{P}$*-algèbre augmentée.*

***2.1. Proposition* (Cohérence)**. — *Les formules ci-après font de $A_+ \otimes B_+$ une $\mathcal{P}$-algèbre augmentée (l'unité étant $1 \otimes 1$) :*

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \circ (a' \otimes b') &:= (a * a') \otimes (b \circ b') \text{ si } b \in B \text{ ou } b' \in B,\\ (a \otimes 1) \circ (a' \otimes 1) &:= (a \circ a') \otimes 1,\end{aligned}$$

où $\circ = \prec$ et $\succ$ (ou une combinaison linéaire quelconque d'icelles), $a, a' \in A_+$ et $b, b' \in B_+$.

On dit alors que le choix d'action de l'unité est *cohérent* avec les relations (ainsi dans ce cas la compatibilité implique la cohérence). Il est pratique pour les calculs d'utiliser la formule (abusive)

$$(a * a') \otimes (1 \circ 1) = a \circ a' \otimes 1.$$

Démonstration. — On remarque que les formules impliquent immédiatement

$$(a \otimes b) * (a' \otimes b') = (a * a') \otimes (b * b')$$

dans tous les cas. Ainsi la structure d'algèbre associative induite est bien la structure habituelle.

Soient $a, a', a'' \in A_+$ et $b, b', b'' \in B_+$. Soit $i = 1, 2$ ou 3. On montre tout d'abord que la relation (Ri) est vérifiée pour $x = a \otimes b$, $y = a' \otimes b'$, $z = a'' \otimes b''$ dans les deux cas suivants

– l'un des éléments b, b', b'' vaut 1 et les deux autres sont dans B,

– deux des éléments b, b', b'' valent 1 et le troisième est dans B.

Les parties gauche et droite de la relation (R1) s'écrivent respectivement

$$((a \otimes b) \prec (a' \otimes b')) \prec (a'' \otimes b'') = (a * a' * a'') \otimes ((b \prec b') \prec b'')$$

et

$$(a \otimes b) \prec ((a' \otimes b') * (a'' \otimes b'')) = (a * a' * a'') \otimes (b \prec (b' * b''))$$

si $b \in B$ ou $b' \in B$. Si l'un des b, b', b'' seulement vaut 1, alors les composantes dans B_+ sont égales par la Proposition 1.4. Si $b = 1 = b''$ et $b' \in B$ les deux termes sont nuls, et sont donc égaux. Si $b' = 1 = b''$ et $b \in B$ les deux termes valent $(a * a' * a'') \otimes b$, ils sont donc égaux. Si $b = 1 = b'$ et $b'' \in B$ les parties gauche et droite s'écrivent respectivement

$$((a \otimes 1) \prec (a' \otimes 1)) \prec (a'' \otimes 1) = ((a \prec a') * a'') \otimes (1 \prec b'') = 0$$

et

$$(a \otimes 1) \prec ((a' \otimes 1) * (a'' \otimes 1)) = (a * a' * a'') \otimes (1 \prec b'') = 0$$

elles sont donc égales.

Les parties gauche et droite de la relation (R2) s'écrivent respectivement

$$((a \otimes b) \succ (a' \otimes b')) \prec (a'' \otimes b'') = (a * a' * a'') \otimes ((b \succ b') \prec b'')$$

et

$$(a \otimes b) \succ ((a' \otimes b') \prec (a'' \otimes b'')) = (a * a' * a'') \otimes (b \succ (b' \prec b'')).$$

Si l'un des b, b', b'' seulement vaut 1, alors les composantes dans B_+ sont égales par la Proposition 1.4. Si $b = 1 = b''$ et $b' \in B$ les deux termes valent $(a * a' * a'') \otimes b'$ et sont donc égaux. Si $b = 1 = b'$ et $b'' \in B$ les parties gauche et droite s'écrivent respectivement

$$((a \otimes 1) \succ (a' \otimes 1)) \prec (a'' \otimes b'') = ((a \succ a') * a'') \otimes (1 \prec b'') = 0$$