Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 51–82

RÉDUCTION AU BORD D'UN PROBLÈME MODÈLE DE KELVIN

par

Pierre Bolley & Pham The Lai

En hommage à Jean Leray

Résumé. — On s'intéresse à la formulation de Neumann-Kelvin du problème d'hydrodynamique navale concernant l'avancement d'un navire dans une mer calme de profondeur uniforme finie. La recherche d'une fonction de Green pour ce problème est ramenée par réduction sur la surface libre à un problème pseudo-différentiel pour lequel on présente un cadre et une méthode de résolution.

***Abstract* (Boundary reduction of a Kelvin-like problem).** — We are interested in the Neumann-Kelvin formulation of the marine hydrodynamics problem of a moving ship in a quiet sea of uniform finite depth. Looking for a Green function for this problem we are brought to a reduced pseudo-differential problem on the free boundary, for which we give a framework and a solving method.

Introduction

Le problème d'hydrodynamique navale concernant l'avancement d'un navire dans une mer calme est important tant du point de vue théorique que numérique, puisqu'il conduit en particulier au calcul de la résistance de vagues. Sous des hypothèses physiques classiques, la modélisation de ce problème se traduit par un système d'équations non linéaires dont une formulation linéarisée est celle de Neumann-Kelvin. Le cadre de cette modélisation dans le cas d'une mer de profondeur finie est le suivant (*cf.* par exemple [**WL**], [**N**], [**K**]...).

Étant donné un solide se déplaçant d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse V_0 dans un fluide de profondeur finie, limité inférieurement par un fond fixe et supérieurement par une surface libre, on considère un repère direct $Ozxy$ lié au solide, Oz étant l'axe vertical ascendant, Oxy le plan horizontal de la surface

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35J25, 35S99, 76B20, 76B99.
Mots clefs. — Hydrodynamique navale, problème de Neumann-Kelvin, résistance de vagues.

libre au repos, l'axe Ox étant dirigé selon la vitesse d'avance du solide. Le fond du fluide est supposé défini par l'équation $z = -h$ avec h réel > 0.

On suppose que le fluide est parfait, incompressible et qu'il n'est soumis qu'à des forces de gravité et de pression, et que l'écoulement est irrotationnel et stationnaire dans ce repère. Il existe alors un potentiel ϕ du champ de vitesses qui est harmonique et qui vérifie l'intégrale première de Bernoulli dans le domaine fluide. Par ailleurs l'écoulement est caractérisé par la présence d'une surface libre décrite par une équation $z = \eta(x, y)$ et sur laquelle on a une condition cinématique et une condition dynamique.

Ces deux inconnues ϕ et η vérifient alors un système d'équations non linéaires dans lequel l'inconnue ϕ est définie dans le domaine fluide qui dépend de l'inconnue η. Ces équations sont en fait simplifiées en faisant certaines hypothèses de linéarisation.

On suppose qu'au voisinage de la surface libre

$$\phi = -V_0 x + \varphi$$

où φ est une petite perturbation et que la hauteur de surface libre η est du même ordre. Par linéarisation, on obtient un système d'équations linéaires que doit vérifier φ. Cependant dans ces équations linéarisées, on ne voit aucune dissymétrie entre le comportement de φ à l'amont $x > 0$ et celui à l'aval $x < 0$. Or à l'amont, l'écoulement incident n'est pas perturbé par la présence du solide et on impose donc dans un sens à préciser, la condition de radiation

$$\lim_{x\to+\infty} \nabla\varphi = 0.$$

On est alors conduit au problème suivant dit de Neumann-Kelvin

$$\begin{cases} (\partial_z^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = 0, & \text{dans } -h < z < 0, \\ \partial_n \varphi = V_0 n \cdot \overrightarrow{x}, & \text{sur } \Gamma, \\ \nu \partial_z \varphi + \partial_x^2 \varphi = 0, & \text{sur } z = 0, \\ \partial_z \varphi = 0, & \text{sur } z = -h, \\ \text{condition de radiation}, \end{cases}$$

où n est le vecteur normal unitaire extérieur au bord Γ du solide et

$$\nu = \frac{g}{V_0^2}$$

est le paramètre de Kelvin dans lequel g est l'accélération de la pesanteur.

Il est en fait important de connaître une fonction de Green associé à ce problème tant du point de vue théorique que du point de vue numérique, en particulier pour élaborer des méthodes adaptées aux domaines non bornés.

Pour chercher une fonction de Green G des variables (z, x, y) avec $-h \leqslant z \leqslant 0$, dépendant du point source (z', x', y') avec $-h < z' < 0$, il est commode de poser (*cf.* [**K**] par exemple)

$$G = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) + H$$

où

$$r = ((z-z')^2+(x-x')^2+(y-y')^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad r_1 = ((z+z'+2h)^2+(x-x')^2+(y-y')^2)^{1/2},$$

et de chercher la composante H de G solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_z^2+\partial_x^2+\partial_y^2)H = 0, & \text{dans } -h < z < 0,\\ \nu\partial_z H + \partial_x^2 H = g, & \text{sur } z = 0,\\ \partial_z H = 0, & \text{sur } z = -h,\\ \text{condition de radiation,} \end{cases}$$

où la fonction g vérifie en particulier pour tous $s < 2$ et $\alpha \in \mathbb{N}^2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^s \, |\partial_{xy}^\alpha g(x,y)|^2 \, dxdy < +\infty.$$

On cherche à résoudre ce problème par une méthode de réduction sur la surface $z = 0$.

Par analogie avec le problème de Cauchy pour l'opérateur des ondes $\partial_z^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$ dans le demi-espace $z \leqslant 0$ pour lequel on peut exprimer de façon classique la solution en fonction des données de Cauchy sur la surface $z = 0$ (*cf.* [**SR**], [**T**]...), on montre (*cf.* [**BP**]) que pour toute distribution tempérée $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ des variables (x,y), il existe une unique fonction $u \in C^2([-h,0];\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ des variables (z,x,y) solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_z^2+\partial_x^2+\partial_y^2)u = 0, & \text{dans } -h < z < 0,\\ u = v, & \text{sur } z = 0,\\ \partial_z u = 0, & \text{sur } z = -h, \end{cases}$$

qui s'exprime en fonction de v sous la forme

$$u = C(\cdot; D_{xy})v \qquad \text{dans } -h < z < 0,$$

où l'opérateur de Poisson $C(z; D_{xy})$ est un opérateur en (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ dépendant de z, dont le symbole est défini pour $z \in [-h,0]$ et $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ par

$$C(z;(\xi,\eta)) = \frac{\cosh(|(\xi,\eta)|(z+h))}{\cosh(|(\xi,\eta)|h)}.$$

En particulier l'opérateur de Dirichlet-Neumann $N(D_{xy})$ associé à ce problème, défini par

$$N(D_{xy})v = \partial_z u(0,\cdot,\cdot),$$

est l'opérateur en (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour symbole

$$N((\xi,\eta)) = |(\xi,\eta)| \tanh(|(\xi,\eta)|h).$$

En revenant au problème pour H, on voit ainsi que la recherche d'une fonction H solution du problème aux limites dans $-h \leqslant z \leqslant 0$ peut être ramenée par réduction sur la surface $z = 0$, à la recherche d'une fonction v vérifiant une condition de radiation et solution de l'équation

$$P(D_{xy})v = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

dans laquelle

$$P(D_{xy}) = \nu N(D_{xy}) + \partial_x^2.$$

Dans le travail présenté ici, on donne un cadre et une méthode pour la résolution de ce problème dans $\mathbb{R}^2$. On montre en particulier (*cf.* Théorème 1) que si

$$\nu h > 1,$$

il existe une unique fonction v de type Kelvin, c'est-à-dire de la forme

$$v(x,y) = C \log\left(1 + \frac{x^2}{\nu h - 1} + \frac{y^2}{\nu h}\right)^{1/2} + k(x,y)$$

où C est une constante et $k \in L^\infty(\mathbb{R}_x, L^2(\mathbb{R}_y))$ avec $\lim_{x\to+\infty} \|k(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, solution de l'équation

$$P(D_{xy})v = g \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

Plus précisément pour cette solution v, la constante C est donnée par $C = c\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy$ où c est une constante universelle.

De plus $\partial_{xy}^\alpha v \in L^\infty(\mathbb{R}_x, L^2(\mathbb{R}_y))$ avec $\lim_{x\to+\infty} \|\partial_{xy}^\alpha v(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\alpha| \geqslant 1$.

Ces résultats, qui seront en fait précisés et généralisés en dimension $d \geqslant 2$ pour les variables horizontales (*cf.* paragraphe 1), sont obtenus de la façon suivante. Le cadre de résolution de l'équation $P(D_{xy})v = g$ dans $\mathbb{R}^2$ dépend de l'ensemble Σ des zéros du symbole $P((\xi,\eta))$ de l'opérateur $P(D_{xy})$, cet ensemble étant la réunion de trois composantes disjointes $\Sigma = \Sigma^- \cup \Sigma^0 \cup \Sigma^+$ où $\Sigma^0 = \{0\}$, Σ^- et Σ^+ sont des courbes non bornées de $\mathbb{R}^2$ (*cf.* paragraphe 2). Pour préciser les solutions de type Kelvin de l'équation homogène $P(D_{xy})v = 0$, on est conduit (*cf.* paragraphe 3) à étudier des distributions dont les transformées de Fourier sont des densités de carré intégrable sur Σ^- et Σ^+ dans l'esprit des travaux de [**AH**]. Pour chercher des solutions v de l'équation $P(D_{xy})v = g$, on utilise au voisinage des surfaces Σ^- et Σ^+ (*cf.* paragraphe 4) une méthode d'absorption limite dans l'esprit des travaux de [**V**], alors qu'au voisinage de Σ^0 (*cf.* paragraphe 5) on utilise une méthode de convolution par une solution fondamentale associée à l'opérateur.

On montrera dans un prochain travail que l'on peut obtenir l'existence et l'unicité d'une fonction de Green G du problème de Neumann-Kelvin en profondeur finie, ayant un comportement bien précis à l'amont de type Kelvin, en construisant sa composante H à l'aide de sa trace v sur la surface libre $z = 0$ obtenue par résolution de l'équation $P(D_{xy})v = g$ (*cf.* paragraphe 7).

Des constructions de ce type ont été faites aussi par d'autres auteurs comme par exemple [**E**], [**L**], [**Gu**], [**D**]... en profondeur infinie. On note en particulier que, suivant une technique mise au point par [**L**] pour le problème bidimensionnel, [**Gu**], [**D**] n'utilisent pas une méthode d'absorption limite pour l'existence de v et résolvent directement une équation du type $P(D_{xy})v = g$ (pour un opérateur $P(D_{xy})$ correspondant à $h = \infty$) par transformation de Fourier et division dans l'espace des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^2$.

Pour terminer, on doit ajouter que les traités de référence sur ce sujet donnent différentes formes analytiques de telles fonctions de Green (*cf.* par exemple [**WL**], [**N**], [**K**]...).

1. Notations et résultats

En notant $x = (x_1, x')$ la variable de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$, où $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x' = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$, on désigne par $L^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$ l'espace des fonctions définies dans $\mathbb{R}^d$ considérées comme fonctions intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue dx_1 dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dx' dans $\mathbb{R}^{d-1}$, et par $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$ l'espace défini de manière semblable.

Pour simplifier on note

$$L(\mathbb{R}^d) = L^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1})) \qquad \text{et} \qquad L^*(\mathbb{R}^d) = L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1})),$$

ces espaces étant munis des normes associées à leurs définitions.

On introduit aussi les deux sous-espaces de l'espace $L^*(\mathbb{R}^d)$ définis par

$$\overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d) = \{v \in L^*(\mathbb{R}^d);\ \lim_{x_1 \to +\infty} \|v(x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = 0\},$$

$$\overset{\circ}{L^*}(\mathbb{R}^d) = \{v \in L^*(\mathbb{R}^d);\ \lim_{|x_1| \to +\infty} \|v(x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = 0\}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on désigne par $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions v telles que $(1 + |\cdot|^2)^{s/2} v$ appartienne à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans $\mathbb{R}^d$, cet espace étant muni de la norme associée à sa définition.

En particulier pour $s > 1/2$ on a les inclusions

$$L^2_s(\mathbb{R}^d) \subset L(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad L^*(\mathbb{R}^d) \subset L^2_{-s}(\mathbb{R}^d).$$

Étant donnés deux réels ν et h positifs tels que

$$\nu h > 1$$

on considère la fonction P définie dans $\mathbb{R}^d$ par

$$P(\xi) = \nu |\xi| \tanh(|\xi| h) - \xi_1^2.$$

Cette fonction P est indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^d$ et ses dérivées ont des majorations de la forme $|\partial_\xi^\alpha P(\xi)| \leqslant C_\alpha (1 + |\xi|)^{2-|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leqslant 2$ et tendent vers 0 à