Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 83–98

PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DONT LES RACINES CARACTÉRISTIQUES SONT EN INVOLUTION

par

Renaud Camalès

Résumé. — Dans cet article, nous écrivons la solution de certains problèmes de Cauchy, avec second membre ramifié autour d'un ensemble analytique de codimension 1, sous une forme intégrale nous permettant d'en déduire le lieu singulier.

***Abstract* (Ramified Cauchy problem for some operators with involutive characteristics)**
In this paper, the solution of some ramified Cauchy problems, with second member ramified around some analytic set, is written under an integral form. This integral form allows us to find the singular locus of the solution.

1. Introduction

L'étude de la propagation de singularités de solutions d'équations aux dérivées partielles complexes et du problème de Cauchy ramifié a été un des grands sujets étudiés par J. Leray. Son étude sur ce problème remonte à 1957 avec l'article (sous-titré Cauchy I) [**7**], puis s'est prolongée avec la série de publications intitulées Cauchy II jusqu'à Cauchy VI (voir [**3**] pour une bibliographie complète). Depuis, de nombreux travaux fondamentaux ont été publiés sur ce sujet. En 1976, Hamada-Leray-Wagschal [**4**] ont étudié le problème de Cauchy ramifié

$$\begin{cases} a(x,D)u(x)=0, \\ D_0^h u(x) = w_h(x') \quad \text{pour } x_0=0,\ 0\leqslant h<m, \end{cases}$$

où $a(x,D)$ est un opérateur d'ordre m à caractéristiques multiples de multiplicité constante et où les fonctions w_h sont ramifiées autour de $T=\{x\in\mathbb{C}^{n+1}; x_0=x_1=0\}$. Ces auteurs ont montré que le problème précédent admet une unique solution qui est ramifiée autour de la réunion K des caractéristiques de $a(x,D)$ issues de T.

En 1990, E. Leichtnam [**6**] étudie le même problème mais avec un second membre ramifié de manière quelconque autour de K. Il montre alors que le problème admet une

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35A20, 35A10, 35C15.
Mots clefs. — Problème de Cauchy ramifié, Prolongement analytique.

unique solution qui est, elle aussi, ramifiée autour de K. Ce résultat a été redémontré par Pongérard-Wagschal [**11**] en 1998.

Signalons que la monodromie de tels problèmes a été étudiée en 2002 par R. Camalès [**1, 2**].

On aborde, dans ce travail, l'étude du problème de Cauchy lorsque le second membre est ramifié autour d'un ensemble analytique quelconque de codimension 1. Pour cela, nous supposerons que l'opérateur $a(x, D)$ s'écrit sous la forme

$$X_1 X_2 + R$$

où X_1 et X_2 sont deux champs de vecteurs qui commutent (ce qui est équivalent à supposer les racines caractéristiques en involution) et R est un opérateur d'ordre 1. Le but est d'écrire la solution u du problème sous forme intégrale puis de déterminer le lieu singulier de u grâce aux techniques de prolongement analytique de germes holomorphes définis par des intégrales multiples.

Il est clair que nos hypothèses concernant l'opérateur sont très fortes. Mais celles-ci ont un but : nous permettre d'écrire la solution sous la forme d'une intégrale multiple finie et d'en étudier ainsi aisément le prolongement analytique. Signalons qu'en 1983, C. Wagschal [**12**] donne une écriture intégrale de la solution du problème de Cauchy ramifié pour un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité variable. Malheureusement, cette formulation ne permet pas de déterminer le prolongement analytique de la solution. En 1988, C. Wagschal [**13**] donne pour la première fois le prolongement analytique de la solution d'un problème de Cauchy pour un opérateur à caractéristiques tangentes. La solution de ce problème s'écrit formellement

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(x)$$

où I_m est un germe holomorphe défini par une intégrale sur un simplexe de dimension m. Ceci entraîne des difficultés techniques extrêmement importantes dans la détermination du prolongement analytique de la solution. Ces techniques ne semblent d'ailleurs pas pouvoir se transposer à des opérateurs un peu plus généraux (opérateurs dans $\mathbb{C}^2$ d'ordre 2 en particulier).

Nous indiquons pour finir que nous ne présentons que le cas d'opérateurs d'ordre 2. Nous avons effectué les calculs pour des opérateurs d'ordre m de la forme

$$X_1 \cdots X_m + R$$

où les X_i sont des champs de vecteurs commutants deux à deux et où R est un opérateur d'ordre $m-1$. La démarche pour ce type d'opérateurs, ainsi que les résultats, sont les mêmes que pour le cas $m = 2$ mais les écritures sont beaucoup plus lourdes.

Le plan de l'article est le suivant. Le paragraphe 2 présente les notations employées et énonce le théorème principal. Dans le paragraphe 3, on écrit de manière formelle la solution sous forme intégrale. Le paragraphe 4 montre la convergence de cette écriture formelle. Enfin le paragraphe 5 indique quelques exemples de détermination de lieux singuliers.

2. Notations et énoncé du théorème principal

Les coordonnées d'un point x de $\mathbb{C}^{n+1}$ seront notées $x = (x_0, \ldots, x_n) = (x_0, x')$; on note D_i l'opérateur de dérivation par rapport à la variable complexe x_i.

On considère, au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, le problème de Cauchy holomorphe non caractéristique

$$\begin{cases} p(x,D)u(x) = v(x), \\ u \text{ s'annule deux fois sur } S, \end{cases}$$

où S est un hyperplan non caractéristique en l'origine et $p(x,D)$ est un opérateur différentiel du second ordre tel que

$$p(x,D) = a_1(x,D)a_2(x,D) + b(x,D)$$

où a_1, a_2 et b sont des opérateurs différentiels linéaires du premier ordre, a_1 et a_2 étant homogènes. On suppose que $p(x,D)$ est un opérateur dont les racines caractéristiques sont en involution : ceci signifie, dans notre cas, que

$$a_1(x,D)a_2(x,D) = a_2(x,D)a_1(x,D).$$

Quant à v, nous supposerons qu'il est ramifié autour d'un ensemble analytique L, contenant 0, de codimension 1 et tel que $S \cap L$ soit un ensemble analytique de codimension 1 dans S : autrement dit, il existe un voisinage ouvert connexe Ω de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap S$ soit connexe et il existe un point $a \in \Omega \cap S$ tel que v soit holomorphe au voisinage du point a et se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega - L)$ (où $\mathcal{R}(X)$ désigne le revêtement universel d'une variété analytique connexe X).

Notre but est d'écrire sous forme d'une intégrale double la solution de ce problème au voisinage du point a.

Le problème auquel nous nous intéressons étant local, on peut, via un changement de variables, se ramener au problème suivant

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} [D_0 a(x,D) + b(x,D)]u(x) = v(x), \\ \text{ s'annule deux fois sur } S, \end{cases}$$

où $S : x_0 = 0$. D'après les hypothèses, D_0 et $a(x,D) = D_0 + \sum_{i=1}^n a_i(x)D_i$ commutent, donc

$$D_0 a(x,D) - a(x,D)D_0 = \sum_{i=1}^{n} D_0 a_i(x) D_i \equiv 0.$$

Par conséquent, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $D_0 a_i(x) \equiv 0$.

On note k_j, pour $j = 1, \dots, n$, la solution du problème suivant

$$\begin{cases} a(x,D)k_j(x) = 0, \\ k_j(x) = x_j & \text{pour } x_0 = 0 \end{cases}$$

et $\Sigma : x \mapsto (x_0, k(x)) = (x_0, k_1(x), \dots, k_n(x))$. Σ est un difféomorphisme au voisinage de l'origine. On note Ψ le difféomorphisme inverse de Σ.

On peut remarquer que les hypersurfaces, au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, $K_j = \{x; k_j(x) = 0\}$ sont les hypersurfaces caractéristiques de $a(x,D)$ issues de l'hyperplan $T_j : x_0 = x_j = 0$. De même, les hypersurfaces $H_j = \{x; x_j = 0\}$ sont les hypersurfaces caractéristiques de D_0 issues de T_j. On en déduit que H_j et K_j sont les hypersurfaces caractéristiques de $p(x,D)$ issues de T_j.

Le lemme suivant va nous permettre d'écrire explicitement Ψ.

Lemme 2.1. — *On a, au voisinage de l'origine de* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$,

$$k_j(s, k(x)) = k_j(x_0 + s, x').$$

Démonstration. — En effet, $x \mapsto k_j(s, k(x))$ est solution du problème

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) = 0, \\ u(x) = k_j(s, x') & \text{pour } x_0 = 0. \end{cases}$$

Or $x \mapsto k_j(x_0 + s, x')$ est solution du même problème car les coefficients de $a(x,D)$ sont indépendants de x_0. Donc, par unicité de la solution, on a

$$k_j(s, k(x)) = k_j(x_0 + s, x'). \qquad \square$$

On déduit aisément de ce lemme que $\Psi(x) = (x_0, k(-x_0, x'))$. On en vient, à présent, au théorème principal.

Théorème 2.2. — *Il existe un voisinage ouvert connexe* Ω' *de l'origine de* $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n+1}$ *et un germe holomorphe* f*, au point* $(0,0,a)$*, se prolongeant en une fonction holomorphe sur* $\mathcal{R}(\Omega' - L')$*, où* $L' = \{(t_1, t_2, x); (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2, x')) \in L\}$*, tel que, au voisinage du point* a*, on ait*

$$u(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} f(t_1, t_2, x) dt_1.$$

3. Solution formelle

Dans ce paragraphe, nous écrivons formellement la solution sous forme d'une série, puis ensuite nous montrerons, à l'aide du formalisme des séries majorantes, la convergence de cette série.

Afin de faciliter les calculs, on écrira $p(x,D)$ sous la forme

$$p(x,D) = [D_0 + b(x)]a(x,D) - r(x,D')$$

où $r(x, D') = \sum_{i=1}^{n} r_i(x) D_i$ est un opérateur du premier ordre ne contenant pas de dérivation en x_0. On étudie, par conséquent, le problème suivant

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D) - r(x,D')\Big] u(x) = v(x), \\ u \text{ s'annule deux fois sur } S. \end{cases} \tag{2}$$

On note u_0 la solution, au voisinage du point a, du problème

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D)\Big] u_0(x) = v(x), \\ u_0 \text{ s'annule deux fois sur } S. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Kowalevski, u_0 est holomorphe sur un voisinage du point a. De même, on note u_p ($p \in \mathbb{N}^*$) la solution, au voisinage du point a, de

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D)\Big] u_p(x) = r(x,D') u_{p-1}(x), \\ u_p \text{ s'annule deux fois sur } S. \end{cases}$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un voisinage ouvert du point a sur lequel u_p est holomorphe. De plus, la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p \tag{3}$$

est la solution formelle du problème (2).

Nous allons expliciter, sous forme intégrale, chaque terme u_p, puis nous montrerons, au paragraphe suivant, la convergence de cette série au voisinage du point a. On montre tout d'abord la

Proposition 3.1. — *On peut écrire, au voisinage du point a,*

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} l_{t_1}(y) v(y)\big|_{y=\phi(t,x)} dt_1$$

où $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$, $\phi : (t,x) \mapsto (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2, x'))$ et

$$l_{t_1}(x) = \exp\Big(-\int_0^{t_1} b(s + x_0, x') ds\Big).$$

(Toutes les intégrales s'effectuant sur le segment joignant les bornes.)

Démonstration. — u_0 est solution du problème suivant

$$\begin{cases} a(x,D) u_0(x) = \varphi(x), \\ u_0 \text{ s'annule sur } S, \end{cases}$$

où φ est la solution du problème

$$\begin{cases} [D_0 + b(x)]\varphi(x) = v(x), \\ \varphi \text{ s'annule sur } S, \end{cases}$$

ces deux problèmes étant étudiés au voisinage du point a.