Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 99–123

LE SYSTÈME DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLE SOIXANTE DIX ANS APRÈS JEAN LERAY

par

Jean-Yves Chemin

Résumé. — Ce texte commence par une analyse de l'article fondamental de Jean Leray sur les équations de Navier-Stokes et un bref survol du problème de la régularité globale. Puis, nous étudions les propriétés lagrangiennes des solutions des équations de Navier-Stokes. Dans une dernière section, nous établissons une estimation qui décrit en particulier l'effet régularisant de l'équation de Navier-Stokes en termes d'analyticité.

***Abstract* (The noncompressible Navier-Stokes system seventy years after Jean Leray)**
This text first analyzes the seminal paper of Jean Leray about Navier-Stokes equations. Then we present a brief overview of the problem of global regularity. Then we study lagrangian properties of the solutions of Navier-Stokes equations. In the last section, we establish an estimate which describes the regularization effect of the Navier-Stokes equations in terms of analyticity.

Introduction

Ce texte contient une première partie sur l'historique de la résolution des équations de Navier-Stokes et une seconde partie où nous présentons quelques méthodes ou résultats nouveaux sur les solutions de cette équation, notamment du point de vue de l'existence et de l'unicité de trajectoires et du point de vue de leur régularité analytique. Nous nous limiterons au cas de l'espace entier à trois dimensions, car comme le dit Jean Leray dans l'introduction de son article fondamental (voir [**19**]) « Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace » paru dans la revue Acta Mathematica en 1934 : « *l'absence de parois introduit certes quelques complications concernant l'allure à l'infini des fonctions inconnues, mais simplifie beaucoup l'exposé et met mieux en lumière les difficultés essentielles ; le rôle important que joue l'homogénéité des formules est plus évident ; (les équations aux dimensions permettent de prévoir a priori presque toutes les inégalités que nous écrivons)* ».

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35Q30, 76D05, 34A12.
Mots clefs. — Fluide incompressible, théorie de Littlewood-Paley, équation différentielle ordinaire.

La première section du présent texte consiste en une analyse de l'article de Jean Leray. Elle est en partie reprise d'un texte paru dans le numéro spécial de la Gazette des Mathématiciens dédié à sa mémoire (voir [**9**]). Nous nous sommes attachés à montrer combien le texte de Jean Leray était novateur et combien les problèmes posés dans ce texte sont restés d'actualité. Nous espérons que cette section sera une incitation à sa lecture.

La deuxième section est un historique de l'unicité globale à petites données dans les normes invariantes par les changements d'échelle de l'équation. Nous irons du théorème de Fujita-Kato dans l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{1/2}$ jusqu'à celui de Koch-Tataru dans l'espace des dérivées de fonctions BMO.

La troisième section est dévolue à l'étude des propriétés lagrangiennes de ses solutions. En d'autre termes, nous démontrons un théorème de type Cauchy-Lipschitz pour les solutions considérées dans la section précédente. Ceci s'inspire d'un article de N. Lerner et de l'auteur (voir [**10**]).

Enfin, dans la quatrième et dernière section nous étudions les propriétés d'analyticité des solutions dans le cadre de solutions associées à des données initiales dans l'espace de Sobolev $H^{1/2}$. Les résultats que nous obtenons dans ce domaine ne sont pas réellement nouveaux et ont déjà été démontré en particulier par P.-G. Lemarié-Rieusset dans [**17**]. Toutefois, la méthode de démonstration, basée sur l'utilisation d'une quantité non linéaire qui décrit la régularité analytique de la solution, nous a paru mériter d'être écrite.

Il va de soi que le présent texte n'est pas un exposé exhaustif sur le sujet. Pour des expositions plus complètes du sujet, le lecteur pourra consulter les ouvrages [**5, 11, 18, 24, 25, 29**].

1. L'article fondateur de Jean Leray

Avant de d'analyser le texte fondateur du sujet, nous allons esquisser le contexte dans lequel il a vu le jour. Au tout début du XX^e^ siècle, la question de l'existence globale ou de la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides ne semble pas hanter les esprits ; à cet égard, le court livre d'Henri Poincaré intitulé « Théorie des tourbillons » est exemplaire : traitant de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles, ce livre ne mentionne pas le problème de la régularité minimale nécessaire à l'existence de solutions, ni celui de leur existence globale qui sont les problèmes qui font aujourd'hui le pain quotidien de tout mathématicien étudiant les équations aux dérivées partielles non linéaires.

À la fin des années vingt, ce problème semble devenu d'une grande actualité. Parallèlement aux travaux d'Oseen sur l'équation de Navier-Stokes, publiés en 1911 et 1912 dans Acta Mathematica (voir [**27**] et [**28**]), le problème de l'existence et de l'unicité en temps petit des solutions de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles est abordé et résolu par Lichtenstein entre 1927 et 1930 dans la série d'articles [**20, 21, 22, 23**]. Puis l'existence globale en dimension deux est démontrée par Wolibner en 1933 dans [**32**]. Les travaux de Jean Leray participent de ce grand mouvement.

L'article de Jean Leray commence par une introduction de quatre pages dépourvue de tout symbole mathématique, où le but de l'article est clairement expliqué : il s'agit de valider mathématiquement la théorie de Navier (le nom de Stokes n'apparaît jamais dans l'article) relative au mouvement d'un fluide visqueux. Le programme consiste à démontrer (ou à nier) l'existence et l'unicité globale de solutions pour le système de Navier-Stokes incompressible(1). Cette introduction indique la source d'inspiration, à savoir les deux articles de C. Oseen de 1911 et 1912 (voir [**27**] et [**28**]) et annonce des résultats révolutionnaires : l'existence de solutions globales dites turbulentes, c'est-à-dire très irrégulières.

Le problème de leur régularité et donc de leur unicité, est posé et résolu par l'affirmative dans le cas d'une donnée « suffisamment voisine du repos ». Les problèmes de l'unicité globale et de l'apparition d'une singularité sont posés ; ils restent, comme nous le verrons, d'une très grande actualité.

Le premier chapitre de l'article commence par l'exposé des notations puis procède à divers rappels sur la théorie de l'intégration. Ces rappels nous montrent que la théorie de l'intégration n'était pas, pour le lecteur d'alors, aussi familière qu'elle l'est pour celui d'aujourd'hui.

Le paragraphe 6 de ce chapitre consiste en la démonstration, à l'aide d'intégrations par parties, d'une inégalité de Hardy, pour les fonctions u de classe C^1 telles que u et ses dérivées partielles soient de carré intégrable, à savoir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2}|u(x)|^2 dx \leqslant 4\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Le paragraphe 7 de ce chapitre contient, ni plus ni moins la définition de l'espace que nous désignons aujourd'hui sous la vocable d'espaces de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$. Jean Leray motive ainsi sa définition : considérons une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ telles qu'elles mêmes et leur dérivées partielles soient de carré intégrable. En supposant que la suite $\big(\partial u_n/\partial y_i\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soit faiblement convergente vers $u_{,\,i}$ et en posant

$$u(x) \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\,u_{,\,i}(y)dy,$$

Jean Leray démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans l'espace $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et que de plus, on a, pour toute fonction a de classe C^1 de carré sommable ainsi que

(1)Nous adoptons ici l'usage contemporain qui veut que l'on nomme ainsi ce système d'équations aux dérivées partielles.

ses dérivées premières,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(y)\frac{\partial a}{\partial y_i}(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^3} u_{,\,i}(y)a(y)dy. \tag{1}$$

Vient alors la définition suivante que je cite :

« **Définition des quasi-dérivées**. — *Soient u et $u_{,i}$ deux fonctions de carrés sommables sur $\mathbb{R}^3$; nous dirons que $u_{,\,i}$ est la quasi-dérivée de $u(y)$ par rapport à y_i quand la relation (1) sera vérifiée ; rappelons que dans cette relation (1) $a(y)$ représente une quelconque des fonctions admettant des dérivées premières continues, qui sont, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur $\mathbb{R}^3$.* »

Dans la présentation de cette définition, Jean Leray démontre au passage que l'inclusion de l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$ est compacte, ce qui sera crucial dans la suite.

Ensuite, vient dans le paragraphe 8 l'exposé de la régularisation par convolution, puis dans le paragraphe 9, la démonstration du fait que régularisation et quasi-dérivation commutent et enfin la démonstration de la formule de Leibnitz pour les fonctions de $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Le deuxième chapitre s'intitule « Mouvements infiniment lents ». Sous ce titre, se cache l'étude de l'équation linéarisée, c'est-à-dire l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \nabla p = X \\ \qquad\qquad \operatorname{div} v = 0 \\ \qquad\qquad v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

Le fait de travailler sur l'espace tout entier simplifie grandement ce chapitre qui s'appuie essentiellement sur les travaux d'Oseen de 1911 et utilise la représentation explicite de la solution de l'équation de la chaleur et la projection sur les champs de vecteurs de divergence nulle définie au moyen d'une convolution. Il s'agit de démontrer toutes les inégalités qui seront utiles dans les chapitres suivants.

Le troisième chapitre dont le titre est « Mouvements réguliers » étudie les solutions dites classiques du système de Navier-Stokes, c'est-à-dire les solutions (v, p) de

$$(NS_\nu) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v = -\nabla p \\ \qquad\qquad \operatorname{div} v = 0 \\ \qquad\qquad v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

telles que v soit de classe C^2 et p de classe C^1. Dans tout ce chapitre, la notion de quasi-dérivée n'intervient pas. Après avoir démontré l'effet régularisant du système de Navier-Stokes, en d'autres termes après avoir démontré qu'une solution classique est de classe C^∞ juste après l'instant initial, Jean Leray démontre le théorème suivant :

Théorème. — *Soit v_0 une donnée initiale telle que v_0 et $\partial v_0/\partial y_i$ soient continues et de carrés sommables sur $\mathbb{R}^3$. On suppose de plus que v_0 est bornée. Il existe un unique temps maximal tel qu'il existe une solution classique sur l'intervalle $[0, T[$ telle que*

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt' = \|v_0\|_{L^2}^2.$$

La démonstration repose sur un schéma itératif dont la convergence est démontrée dans les espaces convenables.

Le plus important dans ce chapitre est constitué par les « critères d'irrégularité ». La question est la suivante :

Que doit-il se passer pour que le temps maximal d'existence T soit fini ? Le problème est bien évidemment crucial, car si les solutions régulières étaient globales, (*i.e.* $T = \infty$), le concept de solutions « turbulentes » (c'est-à-dire irrégulières) que Jean Leray va définir dans la suite perdrait beaucoup de son intérêt. Les résultats obtenus sont les suivants : si le temps maximal d'existence T est fini, alors

– pour tout $t \leqslant T$, on a

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2} \geqslant \frac{C\nu^{3/4}}{(T-t)^{1/4}},$$

– pour tout réel $p \in]3, \infty[$, il existe une constante C_p telle que l'on ait, pour tout réel $t \leqslant T$,

$$\|v(t)\|_{L^p} \geqslant \frac{C_p \nu^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{p}\right)}}{(T-t)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{p}\right)}}. \tag{2}$$

Ces critères d'irrégularité sont obtenus par minoration du temps d'existence des solutions régulières.

Jean Leray pense que cette rupture de régularité se produit effectivement et propose une méthode pour produire des solutions singulières ; ce sont les solutions autosimilaires. Ce sont les solutions du type

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right)\cdot$$

Des calculs aisés montrent d'une part que les champs de vecteurs v définis ci-dessus vérifient bien les conditions nécessaires d'apparition d'une singularité et d'autre part que, si v est solution du système de Navier-Stokes, alors V est solution du système

$$-\nu\Delta V + V + x\cdot\nabla V + V\cdot\nabla V = -\nabla P. \tag{3}$$

Jean Leray dit, à propos de ce système, « *Je n'ai malheureusement pas réussi à faire l'étude* [de ce] *système. Nous laisserons donc en suspens cette question de savoir si des irrégularités peuvent ou non se présenter* ».

En 1996, J. Neças, M. Ruczicka et V. Sverák ont démontré dans [**26**] que le système (3) n'avait pas de solution non triviale. Ainsi se trouvait ruiné l'espoir de construire des solutions singulières par cette méthode. La question de la possible apparition ou