

*quatrième série - tome 51      fascicule 5      septembre-octobre 2018*

*ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
de  
L'ÉCOLE  
NORMALE  
SUPÉRIEURE*

Ling-Bing HE

*Sharp bounds for Boltzmann and Landau collision operators*

---

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

---

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

## Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

Patrick BERNARD

### Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE

de 1883 à 1888 par H. DEBRAY

de 1889 à 1900 par C. HERMITE

de 1901 à 1917 par G. DARBOUX

de 1918 à 1941 par É. PICARD

de 1942 à 1967 par P. MONTEL

### Comité de rédaction au 1<sup>er</sup> mars 2018

P. BERNARD

A. NEVES

S. BOUCKSOM

J. SZEFTEL

R. CERF

S. VŨ NGỌC

G. CHENEVIER

A. WIENHARD

Y. DE CORNULIER G. WILLIAMSON

E. KOWALSKI

## Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,

45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.

Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.

[annales@ens.fr](mailto:annales@ens.fr)

---

## Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France

Case 916 - Luminy

13288 Marseille Cedex 09

Tél. : (33) 04 91 26 74 64

Fax : (33) 04 91 41 17 51

email : [abonnements@smf.emath.fr](mailto:abonnements@smf.emath.fr)

### Tarifs

Abonnement électronique : 420 euros.

Abonnement avec supplément papier :

Europe : 540 €. Hors Europe : 595 € (\$ 863). Vente au numéro : 77 €.

---

© 2018 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1<sup>er</sup> juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

*All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.*

---

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

Périodicité : 6 n<sup>os</sup> / an

# SHARP BOUNDS FOR BOLTZMANN AND LANDAU COLLISION OPERATORS

BY LING-BING HE

---

**ABSTRACT.** – The aim of the work is to provide a stable method to get sharp bounds for Boltzmann and Landau operators in weighted Sobolev spaces and in anisotropic spaces. The results and proofs have the following main features and innovations:

- All the sharp bounds are given for the original Boltzmann and Landau operators. The sharpness means the lower and upper bounds for the operators are consistent with the behavior of the linearized operators. Moreover, we make clear the difference between the bounds for the original operators and those for the linearized ones. It will be useful for the well-posedness of the original equations.
- According to the Bobylev’s formula, we introduce two types of dyadic decompositions performed in both phase and frequency spaces to make full use of the interaction and the cancellation. It allows us to see clearly which part of the operator behaves like a Laplace type operator and which part is dominated by the anisotropic structure. It is the key point to get the sharp bounds in weighted Sobolev spaces and in anisotropic spaces.
- Based on the geometric structure of the elastic collision, we make a geometric decomposition to capture the anisotropic structure of the collision operator. More precisely, we make it explicit that the fractional Laplace-Beltrami operator really exists in the structure of the collision operator. It enables us to derive the sharp bounds in anisotropic spaces and then complete the entropy dissipation estimates.
- The structures mentioned above are so stable that we can apply them to the rescaled Boltzmann collision operator in the process of the grazing collisions limit. Then we get the sharp bounds for the Landau collision operator by passing to the limit. We remark that our analysis used here will shed light on the investigation of the asymptotics from Boltzmann equation to Landau equation.

**RÉSUMÉ.** – L’objectif de ce travail est de fournir une méthode robuste pour obtenir des estimations précises pour les opérateurs de Boltzmann et de Landau dans des espaces de Sobolev à poids et des espaces anisotropes. Les résultats et leur démonstration font ressortir les innovations suivantes :

- Toutes les estimations précises concernent les opérateurs originaux de Boltzmann et de Landau. Le mot ‘précis’ se réfère au fait que les estimations sont cohérentes avec le comportement des opérateurs linéarisés correspondants. Ceci est utile pour étudier le caractère bien posé des équations originales.

- En accord avec la formule de Bobylev, on introduit deux types de décomposition dyadique, dans l'espace des phases et dans celui des fréquences, afin d'utiliser au maximum les annulations. Cela nous permet de voir clairement quelle partie de l'opérateur se comporte comme un opérateur de type Laplacien, et quelle partie est dominée par la structure anisotrope.
- En se basant sur la structure géométrique des collisions élastiques, on fait une décomposition géométrique pour capturer la structure anisotrope de l'opérateur de collision. Plus précisément, on explicite le fait que l'opérateur de Laplace-Beltrami apparaît bien dans l'opérateur de collision. Cela nous permet d'obtenir des estimations précises dans des espaces anisotropes et de finaliser les estimations sur la dissipation d'entropie.
- Les structures mentionnées ci-dessus sont si robustes qu'on peut les retrouver dans la limite des collisions rasantes. On obtient ainsi des estimations précises pour le noyau de collision de Landau en passant à la limite. On remarque que la présente analyse éclaire le passage à la limite de l'équation de Boltzmann vers celle de Landau.

## 1. Introduction

The aim of the present work is to provide a stable method to give a complete description of the behavior of the Boltzmann and Landau collision operators. We remark that it is related closely to the derivation of the Landau equation from the Boltzmann equation and also the asymptotics of the Boltzmann equation from short-range interactions to long-range interactions.

We first recall that the Boltzmann equation reads:

$$(1.1) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

where  $f(t, x, v) \geq 0$  is a distribution function of colliding particles which, at time  $t \geq 0$  and position  $x \in \mathbb{T}^3$ , move with velocity  $v \in \mathbb{R}^3$ . We remark that the Boltzmann equation is one of the fundamental equations of mathematical physics and is a cornerstone of statistical physics.

The Boltzmann collision operator  $Q$  is a bilinear operator which acts only on the velocity variable  $v$ , that is,

$$Q(g, f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) (g'_* f' - g_* f) d\sigma dv_*.$$

Here we use the standard shorthand  $f = f(t, x, v)$ ,  $g_* = g(t, x, v_*)$ ,  $f' = f(t, x, v')$ ,  $g'_* = g(t, x, v'_*)$  where  $(v, v_*)$  and  $(v', v'_*)$  are the velocities of particles before and after the collision. Here  $v'$  and  $v'_*$  are given by

$$(1.2) \quad v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad \sigma \in \mathbb{S}^2.$$

The representation is consistent with the physical laws of the elastic collision:

$$\begin{aligned} v + v_* &= v' + v'_*, \\ |v|^2 + |v_*|^2 &= |v'|^2 + |v'_*|^2. \end{aligned}$$

In the definition of  $Q$ ,  $B$  is called the Boltzmann collision kernel. It is always assumed that  $B \geq 0$  and that  $B$  depends only on  $|v - v_*|$  and  $\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma$ . Usually, we introduce the

angle variable  $\theta$  through  $\cos \theta = \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma$ . Without loss of generality, we may assume that  $B(v - v_*, \sigma)$  is supported in the set  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , that is,  $\frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma \geq 0$ . Otherwise,  $B$  can be replaced by its symmetrized form:

$$(1.3) \quad \bar{B}(v - v_*, \sigma) = [B(v - v_*, \sigma) + B(v - v_*, -\sigma)] \mathbf{1}_{\{\frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma \geq 0\}}.$$

Here,  $\mathbf{1}_A$  is the characteristic function of the set  $A$ . In this paper, we consider the collision kernel satisfying the following assumptions:

(A1). The kernel  $B(v - v_*, \sigma)$  takes a product form

$$(1.4) \quad B(v - v_*, \sigma) = \Phi(|v - v_*|)b(\cos \theta),$$

where both  $\Phi$  and  $b$  are nonnegative functions.

(A2). The angular function  $b(t)$  satisfies for  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$(1.5) \quad K\theta^{-1-2s} \leq \sin \theta b(\cos \theta) \leq K^{-1}\theta^{-1-2s}, \quad \text{with } 0 < s < 1, K > 0.$$

(A3). The kinetic factor  $\Phi$  takes the form

$$(1.6) \quad \Phi(|v - v_*|) = |v - v_*|^\gamma,$$

where the parameter  $\gamma$  verifies that  $\gamma + 2s > -1$  and  $\gamma \leq 2$ .

REMARK 1.1. – For inverse repulsive potential, it holds that  $\gamma = \frac{p-5}{p-1}$  and  $s = \frac{1}{p-1}$  with  $p > 2$ . It is easy to check that  $\gamma + 4s = 1$  which makes sense of the assumption  $\gamma + 2s > -1$ . Generally, the case  $\gamma > 0$ , the case  $\gamma = 0$ , and the case  $\gamma < 0$  correspond to so-called hard, Maxwellian, and soft potentials respectively.

REMARK 1.2. – If we replace the assumption (1.5) by

$$(1.7) \quad K\theta^{-1-2s} \left( 1 - \psi\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\epsilon}\right) \right) \leq \sin \theta b(\cos \theta) \leq K^{-1}\theta^{-1-2s} \left( 1 - \psi\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\epsilon}\right) \right),$$

where  $\psi$  is a non-negative and smooth function defined in (1.33), then the mathematical problem of the asymptotics of the Boltzmann equation from short-range interactions to long-range interactions can be formulated by the limit in which the parameter  $\epsilon$  in (1.7) goes to zero. We remark that for fixed  $\epsilon$ , (1.7) corresponds to the famous Grad’s cut off assumption for the kernel  $B$ .

The solutions of the Boltzmann Equation (1.1) enjoy the fundamental properties of the conservation of mass, momentum and the kinetic energy, that is, for all  $t \geq 0$ ,

$$\iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(t, x, v)\phi(v)dvdx = \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(0, x, v)\phi(v)dvdx, \quad \phi(v) = 1, v, |v|^2.$$

Moreover, if the entropy  $H(f)$  is defined by

$$H(f)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \ln f dvdx,$$

then the celebrated Boltzmann’s  $H$ -theorem predicts that the entropy is decreasing over time, which formally is

$$\frac{d}{dt} H(f)(t) = \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} Q(f, f) \ln f dvdx \leq 0.$$