

Alexander Beilinson
Joseph Bernstein
Pierre Deligne
Ofer Gabber

FAISCEAUX PERVERS

ASTÉRISQUE 100

Astérisque est une publication de la Société mathématique de France
Numéro 100

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Hélène ESNAULT
Viviane BALADI	Philippe EYSSIDIEUX
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Alexandru OANCEA
Nicolas BURQ	Fabrice PLANCHON
Damien CALAQUE	

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.munusami@smf.emath.fr	www.ams.org

Tarif 2018

Vente au numéro : 45 € (\$67)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2018

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-878-7

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

ASTÉRISQUE 100

FAISCEAUX PERVERS

Alexander Beilinson

Joseph Bernstein

Pierre Deligne

Ofer Gabber

Société Mathématique de France 2018

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

A. Beilinson

Department of Mathematics, University of Chicago, 5734 S. University Avenue,
Chicago, IL, 60637 USA.

E-mail : `sasha@math.uchicago.edu`

J. Bernstein

School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978 Israel.

E-mail : `bernstei@post.tau.ac.il`

P. Deligne

Institute for Advanced Study School of Mathematics, 1 Einstein Drive,
Princeton, New Jersey 08540 USA.

E-mail : `deligne@ias.edu`

O. Gabber

IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette France.

E-mail : `gabber@ihes.fr`

Classification mathématique par sujets (2010)

18E30 : Derived categories, triangulated categories ;

19F27 : Étale cohomology ;

32S60 : Stratifications ; constructible sheaves ; intersection cohomology ;

55N33 : Intersection homology and cohomology ;

32S30 : Deformations of singularities ; vanishing cycles.

Mots clefs. — Catégorie triangulée, catégorie dérivée, t -structure, cœur d'une t -structure, stratification, faisceau constructible, faisceau ℓ -adique, faisceau pervers, foncteur de prolongement intermédiaire, perversité autoduale, cycles évanescents, théorème de pureté du prolongement intermédiaire, théorème de décomposition, théorème de Lefschetz difficile relatif, poids, complexe pur, complexe mixte.

La Société Mathématique de France remercie la cellule Mathdoc dans le cadre de son programme NUMDAM pour l'aide apportée à cette édition.

FAISCEAUX PERVERS

Alexander Beilinson, Joseph Bernstein, Pierre Deligne,
Ofar Gabber

Résumé. — Ce volume présente la théorie des faisceaux pervers. Les définitions et les propriétés de base des t -structures sur les catégories triangulées sont données dans le premier chapitre. Le second chapitre introduit les faisceaux pervers et le foncteur de prolongement intermédiaire (pour toute perversité), tant dans le cadre des espaces stratifiés que dans celui des schémas. Le troisième chapitre traite de divers sujets complémentaires (catégories dérivées filtrées et foncteur de réalisation, localisation dans la catégorie dérivée des faisceaux). Le quatrième chapitre rassemble des propriétés de base des faisceaux pervers pour la perversité autoduale. Le cinquième chapitre est le cœur de ce livre. Il est consacré à l'étude des faisceaux ℓ -adiques pervers mixtes sur les variétés sur un corps fini ; il contient notamment le théorème de pureté du prolongement intermédiaire, le théorème de décomposition, et le théorème de Lefschetz difficile relatif. Le sixième chapitre explique comment utiliser les résultats du chapitre précédent en géométrie algébrique complexe. La présente édition comprend une liste d'*errata* et d'*addenda*, une bibliographie additionnelle et un appendice sur la t -exactitude de certains foncteurs utiles.

Abstract. — This volume presents the theory of perverse sheaves. Definitions and basic properties of t -structures on triangulated categories are given in the first chapter. Perverse sheaves and the intermediate extension functor (for any perversity) are introduced, in the settings of stratified spaces and of schemes, in the second chapter. The third chapter treats some complementary material on filtered derived categories and the realization functor, and on localization in the derived category of sheaves. The fourth chapter collects basic facts about perverse sheaves for the middle perversity. The fifth chapter, which is the core of the book, considers mixed perverse ℓ -adic sheaves on varieties over a finite field; it contains, in particular, the theorem about purity of the intermediate extension, the decomposition theorem, and the relative hard Lefschetz theorem. The sixth chapter explains how results of chapter five can be used in complex algebraic geometry. The present edition includes a list of *errata* and *addenda*, an additional bibliography, and an appendix on t -exactness of some useful functors.

TABLE DES MATIÈRES

FAISCEAUX PERVERS

A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne & O. Gabber

Préface à la deuxième édition	1
o. Introduction	3
1. Sous-catégories abéliennes d'une catégorie triangulée	14
1.1. Catégories triangulées	14
1.2. Sous-catégories abéliennes	23
1.3. t-catégories	25
1.4. Recollement	39
2. Faisceaux pervers sur les espaces stratifiés et sur les schémas	52
2.1. Espaces stratifiés	52
2.2. Schémas	62
3. Compléments	72
3.1. Catégorie dérivée filtrée, filtrations canoniques et filtrations bêtes	72
3.2. Localisation	81
3.3. Cohomologie entière	94
4. La perversité auto-duale : propriétés géométriques	97
4.1. Morphismes affines	98
4.2. Exactitudes et adjonctions	103
4.3. Objets simples	108
4.4. Cycles évanescents (estimations supérieures)	110
4.5. Estimation de nombres de Betti	113
5. La perversité auto-duale : poids	118
5.1. Rappels de [1]	118
5.2. Une réciproque	125
4.3. La filtration par le poids	130
4.4. Complexes purs	136

6. de \mathbb{F} à \mathbb{C}	144
6.1. Principes	144
6.2. Exemples	155
Bibliographie	162
Index terminologique	164
Index des notations	166
Appendix	167
Errata et addenda	173
Bibliographie additionnelle	179

PRÉFACE À LA DEUXIÈME ÉDITION

Ce volume est une réédition de l'ouvrage *Faisceaux pervers*, publié dans Astérisque 100 comme premier volume des actes de la conférence « Analyse et topologie sur les espaces singuliers », qui s'était tenue à Luminy du 6 au 10 juillet 1981. Le texte original, inchangé, est complété par un bref appendice, une liste d'*errata* et d'*addenda*¹, et une bibliographie additionnelle.

Comme expliqué au début de l'introduction, Ofer Gabber n'avait pas voulu figurer comme coauteur d'Astérisque 100. Les auteurs sont très heureux qu'il les ait rejoints pour la présente édition.

1. Chaque numéro dans la marge renvoie à un *erratum* ou un *addendum* dans la liste de la page 173.

