Jérémie SZEFTEL

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND III: SPACE-TIME REGULARITY OF THE PHASE

ASTÉRISQUE 401

Société Mathématique de France 2018

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France

Numéro 401

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
`christian.munusami@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs 2018

Vente au numéro : 60 € ($ 90)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 665 €, *hors Europe :* 718 € ($ 1077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën
Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`nathalie.christiaen@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-882-4

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

ASTÉRISQUE 401

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND III: SPACE-TIME REGULARITY OF THE PHASE

Jérémie SZEFTEL

Société Mathématique de France 2018
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. SZEFTEL
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, France.
E-mail : jeremie.szeftel@upmc.fr

2010 *Mathematics Subject Classification*. — Primary 83C05; Secondary 35Q75, 58J45.

***Key words and phrases*. —** Einstein equations, wave equation, eikonal equation, rough solutions.

PARAMETRIX FOR WAVE EQUATIONS ON A ROUGH BACKGROUND III: SPACE-TIME REGULARITY OF THE PHASE

Jérémie SZEFTEL

Abstract. — This book is the third of a sequence of four papers dedicated to the construction and the control of a parametrix to the homogeneous wave equation $\Box_{\boldsymbol{g}}\phi = 0$, where $\boldsymbol{g}$ is a rough metric satisfying the Einstein vacuum equations. Controlling such a parametrix as well as its error term when one only assumes L^2 bounds on the curvature tensor $\boldsymbol{R}$ of $\boldsymbol{g}$ is a major step of the proof of the bounded L^2 curvature conjecture proposed in 2000 and solved in 2015 by S. Klainerman, I. Rodnianski and the author. On a more general level, this book deals with the control of the eikonal equation on a rough background, and with the derivation of L^2 bounds for Fourier integral operators on manifolds with rough phases and symbols, and as such is also of independent interest.

Résumé **(Parametrix pour l'équation des ondes sur un espace-temps peu régulier III : régularité espace-temps de la phase)**

Cet ouvrage est le troisième d'une suite de quatre articles consacrés à la construction et au contrôle d'une paramétrix pour l'équation des ondes homogènes $\Box_{\boldsymbol{g}}\phi = 0$, où $\boldsymbol{g}$ est une métrique peu régulière satisfaisant les équations d'Einstein dans le vide. Le contrôle d'une telle paramétrix et du terme d'erreur associé quand on suppose seulement des bornes L^2 sur le tenseur de courbure $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{g}$ est une étape cruciale de la preuve de la conjecture de courbure L^2 proposée en l'an 2000 et résolue en 2015 par S. Klainerman, I. Rodnianski et l'auteur. Plus généralement, cet ouvrage concerne le contrôle de l'équation eikonale sur un espace-temps peu régulier et la dérivation de bornes L^2 pour des opérateurs intégraux de Fourier sur des variétés avec une phase et un symbole peu réguliers, et possède de ce point vue un intérêt propre.

CONTENTS

1. Introduction 1

2. Main results 7
2.1. Maximal foliation on $\mathcal{M}$ 7
2.2. Geometry of the foliation generated by u on $\mathcal{M}$ 8
2.3. Null structure equations 11
2.4. Commutation formulas 16
2.5. Bianchi identities 17
2.6. Assumptions on $\boldsymbol{R}$ and $u_{|\Sigma_0}$ 17
2.7. Main results 20
2.8. Dependance of the norm $L^\infty_u L^2(\mathcal{H}_u)$ on $\omega \in \mathbb{S}^2$ 24
2.9. Additional estimates for $\mathrm{tr}\chi$ 27
2.10. Organization of the book 27

3. Calculus inequalities on $P_{t,u}$, $\mathcal{H}_u$ and Σ_t 29
3.1. Calculus inequalities on $P_{t,u}$ 29
3.2. Geometric Littlewood Paley theory on $P_{t,u}$ 31
3.3. Hodge systems 36
3.4. Calculus inequalities on $\mathcal{H}_u$ 40
3.5. Calculus inequalities on Σ_t 43
3.6. Geometric Littlewood-Paley theory on Σ_t 49

4. Regularity with respect to (t, x) 59
4.1. Lower bound on the injectivity radius on $\mathcal{H}_u$ 60
4.2. Coordinate systems on Σ_t and $P_{t,u}$ 64
4.3. Bound on the Gauss curvature K 67
4.4. Estimates for the lapse n 69
4.5. Estimates for k on $\mathcal{H}_u$ 72

4.6. Time foliation versus geodesic foliation 76
4.7. Trace norm bounds for $\overline{\delta}$ and $\overline{\epsilon}$ 84
4.8. Estimates for b 90
4.9. Remaining estimates for $\mathrm{tr}\,\chi$, $\widehat{\chi}$ and ζ 93

5. Estimates for $\underline{L}\,\underline{L}\,\mathrm{tr}\,\chi$, $\nabla\!\!\!/_{\underline{L}}(\zeta)$ and $\underline{L}\underline{L}(b)$ 97
5.1. Besov improvement for $\mathrm{tr}\,\chi$ in the time foliation 97
5.2. Structure equations for $\underline{L}\,\underline{L}\,\mathrm{tr}\,\chi$ and $\nabla\!\!\!/_{\underline{L}}(\zeta)$ 105
5.3. Estimates for $\nabla\!\!\!/_{\underline{L}}(\zeta)$ 109
5.4. Estimates for $\underline{L}\,\underline{L}\,\mathrm{tr}\,\chi$ 111
5.5. Estimates for $\underline{L}\underline{L}b$ 116

6. First order derivatives with respect to ω 123
6.1. Commutator formulas 123
6.2. Control of $\partial_\omega N$, $\partial_\omega b$, $\partial_\omega \chi$ and $\partial_\omega \zeta$ 128
6.3. Control of $\nabla\!\!\!/_{\underline{L}}\Pi(\partial_\omega \chi)$ 133
6.4. Proof of the decomposition (2.79) for $\widehat{\chi}$ 136
6.5. Besov improvement for $\partial_\omega N$ and $\partial_\omega \chi$ 148
6.6. Estimate for $N(\cdot,\omega) - N(\cdot,\omega')$ 149

7. Second order derivatives with respect to ω 153
7.1. Equation for $\boldsymbol{D}_L \partial^2_\omega N, \boldsymbol{D}_A \partial^2_\omega N, \boldsymbol{D}_{\underline{L}}\, \partial^2_\omega N$, $\partial^2_\omega \zeta$ and $\partial^2_\omega b$ 153
7.2. Estimates for $\partial^2_\omega N$, $\partial^2_\omega b$, $\partial^2_\omega \chi$ and $\partial^2_\omega \zeta$ 158

8. Dependance of the norm $L^\infty_u L^2(\mathcal{H}_u)$ on $\omega \in \mathbb{S}^2$ 165
8.1. The basic estimates 165
8.2. Decompositions involving $\partial_\omega N$, $\mathrm{tr}\,\chi$ and b^p 171
8.3. A first variant of Proposition 8.1 172
8.4. Decompositions involving χ 176
8.5. A second variant of Proposition 8.1 181
8.6. Decompositions involving ζ, $\nabla\!\!\!/ b$ and $\partial_\omega b$ 184

9. Additional estimates for $\mathrm{tr}\,\chi$ 187
9.1. Commutator estimates between P_j and $\nabla\!\!\!/_L, \nabla\!\!\!/_N$ 187
9.2. Commutator estimates acting on $\mathrm{tr}\,\chi$ 187
9.3. Additional estimates for $P_j\,\mathrm{tr}\,\chi$ 188

A. Appendix to chapter 4 197
A.1. Proof of Proposition 4.11 197
A.2. Proof of Lemma 4.14 202
A.3. Proof of Lemma 4.24 204

B. Appendix to chapter 5 207
B.1. Proof of Lemma 5.6 207
B.2. Proof of Lemma 5.7 208
B.3. Proof of Lemma 5.8 210

B.4. Proof of Lemma 5.9 210
B.5. Proof of Lemma 5.10 211
B.6. Proof of Lemma 5.11 212
B.7. Proof of Lemma 5.12 214
B.8. Proof of Lemma 5.13 217
B.9. Proof of Lemma 5.14 228
B.10. Proof of Lemma 5.15 230
B.11. Proof of Lemma 5.16 233
B.12. Proof of Lemma 5.17 233

C. Appendix to chapter 6 235
C.1. Proof of Lemma 6.9 235
C.2. Proof of Lemma 6.10 238
C.3. Proof of Lemma 6.12 239
C.4. Proof of Lemma 6.13 239
C.5. Proof of Lemma 6.14 240
C.6. Proof of Lemma 6.16 243
C.7. Proof of Lemma 6.17 245
C.8. Proof of Lemma 6.18 246
C.9. Proof of Lemma 6.19 249
C.10. Proof of Lemma 6.20 251
C.11. Proof of Lemma 6.21 251
C.12. Proof of Lemma 6.23 255
C.13. Proof of Lemma 6.24 257
C.14. Proof of Lemma 6.25 258

D. Appendix to chapter 8 261
D.1. Proof of Lemma 8.3 261
D.2. Proof of Lemma 8.4 266
D.3. Proof of Lemma 8.5 267
D.4. Proof of Lemma 8.6 268
D.5. Proof of Lemma 8.7 270
D.6. Proof of Lemma 8.8 272
D.7. Proof of Lemma 8.9 274
D.8. Proof of Lemma 8.12 278
D.9. Proof of Lemma 8.18 279
D.10. Proof of Lemma 8.19 283
D.11. Proof of Lemma 8.20 284

E. Appendix to chapter 9 289
E.1. Proof of Proposition 9.1 289
E.2. Proof of Proposition 9.2 292
E.3. Proof of Proposition 9.3 294
E.4. Proof of Proposition 9.4 298
E.5. Proof of Proposition 9.5 304
E.6. Proof of Proposition 9.6 307

E.7. Proof of Lemma 9.7 309
E.8. Proof of Lemma 9.8 312
E.9. Proof of Lemma 9.9 313
E.10. Proof of Lemma 9.10 316
E.11. Proof of Lemma 9.11 317

Bibliography 319

Index 323