

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LA CONJECTURE LOCALE DE
GROSS-PRASAD POUR LES
REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES
DES GROUPES UNITAIRES

Numéro 149
Nouvelle série

2 0 1 6

Raphaël BEUZART-PLESSIS

Comité de rédaction

Valérie BERTHÉ	Raphaël KRIKORIAN
Gérard BESSON	O' Grady KIERAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Emmanuel RUSS
Jean-François DAT	Christophe SABOT
Charles FAVRE	Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

Tarifs 2016

Vente au numéro : 45 € (\$67)

Abonnement Europe : 138 €, hors Europe : 154 € (\$231)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-841-1

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

**LA CONJECTURE LOCALE DE
GROSS-PRASAD POUR LES
REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES
DES GROUPES UNITAIRES**

Raphaël Beuzart-Plessis

R. Beuzart-Plessis

Université d'Aix-Marseille, I2M-CNRS, Campus de Luminy,
13288 Marseille CEDEX 9, France.

E-mail : rbeuzart@gmail.com

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50, 11F85, 20G05.

Mots clefs. — Conjecture locale de Gross-Prasad, groupes p -adiques, représentations tempérées.

LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Raphaël Beuzart-Plessis

Résumé. — Soient E/F une extension quadratique de corps p -adiques et $G = U(V)$, $H = U(W)$ les groupes unitaires de deux espaces hermitiens V et W sur E . Supposons que V contienne W et que le complémentaire orthogonal de W dans V soit quasi-déployé (ce qui signifie que son groupe unitaire est quasi-déployé sur F). Pour π et σ des représentations lisses irréductibles de $G(F)$ et $H(F)$, les auteurs Gan, Gross et Prasad ont défini une multiplicité $m(\pi, \sigma)$. Dans le cas particulier où W est de codimension 1 dans V , cette multiplicité est simplement la dimension de l'espace d'entrelacements $\mathbf{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$. On énonce et prouve une formule intégrale pour cette multiplicité lorsque π et σ sont tempérées. On déduit alors de cette formule une version faible de la conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires. Cet article est la continuation directe d'un travail récent de Waldspurger concernant les groupes spéciaux orthogonaux.

Abstract. — Let E/F be a quadratic extension of p -adic fields and let $G = U(V)$, $H = U(W)$ be unitary groups of two hermitian spaces V and W over E . Assume that V contains W and that the orthogonal complement of W in V is an odd-dimensional quasisplit hermitian space (i.e. whose unitary group is quasisplit over F). For π and σ smooth irreducible representations of respectively $G(F)$ and $H(F)$, Gan, Gross and Prasad have defined a multiplicity $m(\pi, \sigma)$. In the particular case where W is of codimension 1 in V , this multiplicity is just the dimension of the intertwining space $\text{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$. When π and σ are tempered, we state and prove an integral formula for this multiplicity. We then deduce from this formula a weak version of the local Gross-Prasad conjecture for tempered representations of unitary groups. This article represents a straight continuation of recent work of Waldspurger dealing with special orthogonal groups.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Groupes, mesures, notations	9
1.1. Groupes	9
1.2. Mesures	12
1.3. Bons voisinages	14
1.4. Intégrales orbitales invariantes et pondérées, quasi-caractères ...	14
1.5. Représentations, induites paraboliques, opérateurs d'entrelacements, caractères pondérés	16
1.6. R-groupes	18
1.7. Formule de Plancherel-Harish-Chandra	19
1.8. Fonctions cuspidales et très cuspidales, quasi-caractères associés	21
2. Majorations unipotentes	23
2.1. Une première majoration	23
2.2. Intégrales à paramètres	24
2.3. Fonctionnelles de Jacquet	25
2.4. Majorations de mesures	30
3. Les groupes unitaires	33
3.1. Généralités	33
3.2. Sous-groupes compacts spéciaux, paraboliques, Levi et R-groupes	35
3.3. Orbites nilpotentes régulières	36
4. Position du problème	39
5. Le développement géométrique : définitions et énoncé	43
5.1. Un ensemble de tores	43
5.2. Un critère de convergence	44
5.3. Définition de $J_{\text{geom}}(\theta, f)$	48
5.4. Énoncé du développement géométrique	52
5.5. Énoncé du théorème pour les algèbres de Lie	52

6. Descente à l'algèbre de Lie	55
6.1. Localisation de $J_N(\theta, f)$	55
6.2. Localisation de $J_{\text{geom}}(\theta, f)$	59
7. Utilisation de la transformée de Fourier	63
7.1. Étude des classes de conjugaison dans $\Xi + S + \Sigma$	64
7.2. Un calcul de jacobien	70
7.3. Choix de sections localement analytiques	73
7.4. Calcul de $J_{\kappa''}(\theta'', \varphi)$	77
8. Calcul de la limite de $J_{x,\omega,N}(\theta, f)$	79
8.1. Première transformation de $J_{x,\omega,N}(\theta, f)$	79
8.2. Changement de la fonction de troncature	82
8.3. Le résultat final	89
9. Cas des supports nilpotents	91
9.1. Calcul de la limite de $J_N(\theta, f)$	91
9.2. Une première approximation	93
9.3. Calcul de germes de Shalika	95
9.4. Preuve de la proposition 9.0.1	95
10. Preuve des théorèmes 5.4.1 et 5.5.1	99
10.1. Preuve du théorème 5.5.1	100
10.2. Preuve du théorème 5.4.1	101
11. Décomposition de Cartan relative	103
12. Majorations d'intégrales, cas $R = 0$	113
13. Majorations d'intégrales, cas général	119
14. Entrelacements tempérés	133
14.1. Un lemme sur les entrelacements	134
14.2. Entrelacements dans une famille d'induites	135
14.3. Tout entrelacement est tempéré	144
15. Induction et multiplicités	149
15.1. Induction de π et multiplicité I	150
15.2. Induction de σ et multiplicité	154
15.3. Induction de π et multiplicité II	155
16. Le développement spectral	157
16.1. La formule	157
16.2. Utilisation de la formule de Plancherel	158
16.3. Changement de fonction de troncature	161

16.4. Utilisation des calculs spectraux d'Arthur	163
16.5. Évaluation d'une limite	164
16.6. Preuve du théorème	165
17. Une formule pour la multiplicité	167
17.1. Le théorème	167
17.2. Induction pour la multiplicité géométrique	168
17.3. Pseudo-coefficients	173
17.4. Le cas du groupe linéaire	174
17.5. Le théorème 17.1.2 implique le théorème 17.1.1	174
17.6. Preuve du théorème 17.1.2	175
18. Une application à la conjecture de Gross-Prasad	179
18.1. Propriétés des L -paquets tempérés pour les groupes unitaires ..	179
18.2. Un calcul de fonction \widehat{j}	181
18.3. Classes de conjugaison stable de tores	181
18.4. Un résultat dans le sens de la conjecture de Gross-Prasad	185
Bibliographie	189

