

# Séminaires & Congrès

COLLECTION S M F



## INTRODUCTION AUX INÉGALITÉS DE CARLEMAN

Gilles Lebeau

## CONTROL AND STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Numéro 29

Kaïs Ammari, ed.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# INTRODUCTION AUX INÉGALITÉS DE CARLEMAN

*par*

Gilles Lebeau

---

**Résumé.** — On introduit les bases du calcul  $h$ -pseudodifférentiel. On applique ce calcul pour prouver des estimations de Carleman elliptiques, ou paraboliques. En utilisant les inégalités de Carleman elliptiques, on prouve une inégalité de type spectral sur les combinaisons linéaires de fonctions propres du laplacien. Comme application de cette inégalité spectrale, on donne une preuve de la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur dans un domaine régulier de  $\mathbb{R}^n$ . Enfin, on donne une preuve alternative de la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur en utilisant les estimations de Carleman paraboliques.

## 1. Introduction

Les estimations de Carleman ont été introduites en 1939 par T. Carleman [1] pour démontrer des résultats d'unicité pour les solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques. Ces estimations ont été systématisées et généralisées en particulier par L. Hörmander [4]. Les estimations de type Carleman en trouvé depuis de nouveaux champs d'applications, en particulier en théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles (voir par exemple [3] et [8]), en théorie spectrale (voir [7]) et aussi dans l'étude des problèmes inverses (reconstruction de coefficients d'une équation par observation partielle de certaines de ses solutions, voir [5]). On renvoie à l'article de survey [6] pour une bibliographie conséquente sur le sujet.

Ces notes contiennent une introduction aux techniques d'inégalités de Carleman, avec application au contrôle d'équations paraboliques (typiquement, équation de la chaleur). Si  $P$  est un opérateur différentiel, une inégalité de Carleman typique est de la forme

$$\|h^{1/2}e^{\varphi/h}u\|_{L^2}^2 + \|h^{3/2}e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_{L^2}^2 \leq C\|h^2e^{\varphi/h}Pu\|_{L^2}^2$$

où  $\varphi$  est une fonction  $C^\infty$  et  $h > 0$  un petit paramètre. Le point de vue systématique adopté dans ces notes de cours est que l'obtention d'une telle inégalité revient naturellement à prouver une estimation sur l'opérateur différentiel conjugué

$$P_\varphi = h^2 e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h}$$

qui dépend explicitement du petit paramètre  $h$ , et est un opérateur  $h$ -différentiel. L'obtention de l'inégalité de Carleman revient alors à l'étude des propriétés de la variété caractéristique de l'opérateur  $P_\varphi$ , qui dépend fortement des propriétés de la fonction  $\varphi$ . Dans l'espace de phase, la conjugaison  $P \rightarrow P_\varphi$  est associée à la transformation canonique *complexe*

$$(x, \xi) \rightarrow (x, \xi + i\varphi'(x))$$

qui est licite, car le symbole de  $P$  dépend polynomialement de  $\xi$ .

Ces notes de cours sont organisées comme suit :

Dans la section 2, on rappelle les notions de base du calcul  $h$ -pseudodifférentiel : symboles, opérateurs, théorème de calcul symbolique (théorème 2.1), théorème d'opérance sur les espaces de Sobolev semiclassiques (théorème 2.2). On prouve l'inégalité de Garding semiclassique (théorème 2.3) qui est un des ingrédients de la preuve des inégalités de Carleman. Enfin on décrit l'exemple simple de l'oscillateur harmonique qui fait clairement apparaître une inégalité de Carleman (qui est en fait ici l'inégalité de Heisenberg) comme conséquence de la positivité d'un commutateur. On renvoie aux ouvrages [2] et [9] pour les preuves des résultats standards que nous rappellerons ici et utiliserons ensuite sur le calcul  $h$ -pseudodifférentiel.

Dans la section 3, on commence par donner la preuve de l'inégalité de Carleman elliptique "locale" pour un opérateur de type laplacien (théorème 3.1). On en déduit le célèbre théorème d'unicité de Calderon (théorème 3.2). On donne ensuite la preuve de l'estimation de Carleman "au bord" (théorème 3.5) après avoir introduit les notions et résultats de base du calcul  $h$ -pseudodifférentiel tangentiel.

Dans la section 4, on expose la preuve des inégalités de Carleman paraboliques "locales en espace" ou "au bord" (théorèmes 4.1 et 4.2). Les preuves s'obtiennent par réduction à une inégalité stationnaire en variable temporelle. Pour l'inégalité "au bord", la preuve utilise une version "au bord" de l'inégalité de Garding, qui semble être un point technique nouveau dans ce cadre.

Dans la section 5, on montre d'abord (théorème 5.1) comment on peut déduire des estimations de Carleman elliptiques des inégalités d'interpolation globales, ne faisant plus apparaître le petit paramètre  $h$ . On en déduit une inégalité spectrale sur les combinaisons linéaires de fonctions propres du laplacien avec condition de Dirichlet au bord dans un domaine borné régulier (théorème 5.2). Cette inégalité spectrale est une des plus spectaculaires applications des inégalités de Carleman.

Enfin, dans la section 6, on expose la preuve du théorème de contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur. Cette preuve suit la stratégie de l'article [8], mais est grandement simplifiée par l'usage de l'inégalité spectrale prouvée dans la section 5.

Finalement, on montre comment les inégalités de Carleman paraboliques fournissent une preuve alternative de la contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur, via l'obtention d'une inégalité d'observabilité (donc une preuve dans l'esprit des travaux de Fursikov et Imanuvilov, voir [3]).

**Notations**

On note  $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées.

Pour  $K$  compact de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $C_K^\infty$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support dans  $K$ .

On note  $h \in ]0, h_0]$  un petit paramètre réel.

Pour  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \quad \text{et} \quad \langle \xi \rangle = (1 + \xi^2)^{1/2}.$$

Pour  $V$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f$  fonction de  $V$  dans  $\mathbb{C}$ , on note

$$\|f\|_{L^2(V)} = \left( \int_V |f|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{H^1(V)} = \left( \int_V (|f|^2 + |\nabla f|^2) dx \right)^{1/2}$$

les normes  $L^2$  et  $H^1$  de  $f$ .

L'adjoint  $A^*$  de l'opérateur  $A$  est l'adjoint sur  $L^2$ , défini par

$$\int A^*(u)(x)\bar{v}(x)dx = \int u(x)\overline{A(v)(x)}dx.$$

**2. Calcul h-pseudodifférentiel**

**Définition 2.1.** — Soit  $a(x, \xi, h)$  une fonction  $C^\infty$  de  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , dépendant de  $h \in ]0, h_0]$ . On dit que  $a$  est un symbole d'ordre  $m$ , et on note  $a \in S^m$  ssi pour tout multi-indice  $\alpha, \beta$ , il existe une constante  $C_{\alpha, \beta}$  telle que

$$(2.1) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \forall h \in ]0, h_0]$$

Pour  $a \in S^m$ , le symbole principal de  $a$ , qu'on note  $\sigma_m(a)$ , est la classe de  $a$  dans l'espace quotient  $S^m/hS^{m-1}$ .

On a évidemment  $S^m \subset S^{m'}$  pour tout  $m \leq m'$ , et on vérifie aisément que pour  $a \in S^m$  et  $b \in S^{m'}$ , on a  $ab \in S^{m+m'}$ ,  $\frac{\partial a}{\partial x_j} \in S^m$ ,  $\frac{\partial a}{\partial \xi_j} \in S^{m-1}$ , et en notant

$$\{a, b\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial b}{\partial \xi_j}$$

le crochet de Poisson des fonctions  $a$  et  $b$ , on a  $\{a, b\} \in S^{m+m'-1}$ .

**Définition 2.2.** — Soit  $a \in S^m$  et  $(a_j)_{j \geq 0}$  une suite de symboles avec  $a_j \in S^{m-j}$ . On dit que  $a$  est asymptotique à la somme des  $h^j a_j$ , et on note  $a \simeq \sum_j h^j a_j$  ssi pour tout  $N$  entier on a

$$(2.2) \quad a - \sum_{j=0}^N h^j a_j \in h^{N+1} S^{m-N-1}.$$

Le lemme suivant est essentiellement dû à Émile Borel (voir [9], proposition 2.3.2)

**Lemme 2.1.** — Pour toute suite de symboles  $a_j \in S^{m-j}$ , il existe un symbole  $a \in S^m$  tel que  $a \simeq \sum_j h^j a_j$ .

**Définition 2.3.** — Pour  $a \in S^m$ , on note  $\text{Op}(a)$  l'opérateur défini sur l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par la formule

$$(2.3) \quad \text{Op}(a)(u)(x, h) = (2\pi h)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi / h} a(x, \xi, h) \hat{u}(\xi / h) d\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

où  $\hat{u}(\eta) = \int e^{-iy \cdot \eta} u(y) dy$  est la transformée de Fourier de  $u$ .

On remarquera que  $\text{Op}(a)$  est en fait une famille d'opérateurs dépendant du paramètre  $h \in ]0, h_0]$  : pour chaque valeur de  $h \in ]0, h_0]$ , la formule (2.3) définit un opérateur agissant sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour  $a \in S^m$ , on vérifie aisément que (pour tout  $h$  fixé)  $\text{Op}(a)$  est continu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De plus  $\text{Op}(a)$  se prolonge de manière unique en opérateur continu de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , où  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$ , et on a

$$(2.4) \quad a(x, \xi, h) = e^{-ix \cdot \xi / h} \text{Op}(a)(e^{ix \cdot \xi / h})$$

de sorte que l'application  $a \mapsto \text{Op}(a)$  est injective. Pour  $a \in S^m$ , on note  $\text{Op}(a) \in \mathcal{E}^m$ , et pour  $A = \text{Op}(a) \in \mathcal{E}^m$ , on appelle  $a(x, \xi, h)$  le symbole complet de  $A$ . On note  $a = \sigma(A)$ . On appelle symbole principal de  $A$ , la classe de  $a$  dans l'espace quotient  $S^m / hS^{m-1}$ . On note  $\sigma_m(A) = \sigma_m(a)$  le symbole principal de  $A$ . Enfin, on pose

$$(2.5) \quad \mathcal{E} = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{E}^m.$$

Les éléments de  $\mathcal{E}$  s'appellent les opérateurs  $h$ -pseudodifférentiels, on a  $\mathcal{E}^m \subset \mathcal{E}^{m'}$  pour  $m \leq m'$ , et pour  $A \in \mathcal{E}^m$ , on dit que  $A$  est de degré (au plus)  $m$ .

**Exemple 2.1.** — La fonction constante égale à 1 appartient à  $S^0$ , et on a par la formule d'inversion de Fourier et (2.3)

$$\text{Op}(1)(u) = u.$$

On a aussi  $\xi_j \in S^1$ , et  $\text{Op}(\xi_j)u = \frac{h}{i} \frac{\partial u}{\partial x_j}$ . Pour  $\phi(x) \in C_b^\infty$ , on a  $\phi \in S^0$ , et  $\text{Op}(\phi)u = \phi u$ . Plus généralement, on remarquera qu'on a

$$\text{Op}(\phi(x)a(x, \xi, h))(u) = \phi(x)\text{Op}(a(x, \xi, h))(u)$$