ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 41 fascicule 5 septembre-octobre 2008

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Alberto MÍNGUEZ

Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 41, 2008, p. 717 à 741

CORRESPONDANCE DE HOWE EXPLICITE : PAIRES DUALES DE TYPE II*

PAR Alberto MÍNGUEZ

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode pour démontrer la bijectivité de la correspondance de Howe pour les paires duales du type $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_m)$ sur un corps F localement compact non archimédien. La preuve est basée sur une étude soigneuse de la filtration de Kudla [11] ainsi que sur les résultats de [13] à propos de l'irréductibilité d'une représentation induite parabolique. Elle est valable pour F de caractéristique quelconque et nous permet d'expliciter la bijection en termes des paramètres de Langlands. Elle généralise donc les résultats de [20] et répond totalement aux questions étudiées dans [15] et [16] pour les paires duales de type II.

ABSTRACT. – In this article, we give a new method for proving Howe correspondence in the case of dual pairs of type $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_m)$ over a non-Archimedean locally compact field F. The proof consists in combining a study on Kudla's filtration [11] with the results of [13] about the irreducibility of a parabolically induced representation. The proof is valid for F of any characteristic and allows us to make the correspondence explicit in terms of Langlands parameters. Hence it generalizes the results of [20] and answers completely all questions studied in [15] and [16] for dual pairs of type II.

Introduction

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$. Soit $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ un caractère additif non trivial de F. Si W est un espace vectoriel symplectique sur F, de dimension finie, on dispose du groupe métaplectique $\widetilde{Sp}(W)$, qui est un revêtement à deux feuillets du groupe symplectique $Sp(W)$, et d'une représentation (ω, S) de $\widetilde{Sp}(W)$ canoniquement attachée à ψ, dite représentation de Weil ou métaplectique, sur un espace de fonctions S à valeurs complexes. Soit (G, G') une paire duale réductive (*cf.* [14, 1.I.17]) dans $Sp(W)$: ou bien (G, G') est une paire de groupes classiques -symplectique,

*Partially supported by MTM2004-07203-C02-01 and FEDER.

orthogonal, unitaire- (paires duales de type I) ou bien une paire de groupes linéaires (paires duales de type II). Notons $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G'}$ leurs images réciproques dans $\widetilde{Sp}(W)$.

Soit π une représentation lisse irréductible de $\widetilde{G}$ quotient de ω. Notons $S[\pi]$ le plus grand quotient π-isotypique de ω. Il est de la forme

$$S[\pi] = \pi_1 \otimes \Theta(\pi),$$

en tant que $\widetilde{G} \times \widetilde{G'}$-module, où $\Theta(\pi)$ est une représentation lisse de longueur finie de $\widetilde{G'}$.

Roger Howe et Jean-Loup Waldspurger [19], [14] ont prouvé que, dans le cas où p est impair et où (G, G') est de type I, si $\Theta(\pi) \neq 0$, alors $\Theta(\pi)$ a un unique quotient irréductible, noté $\theta(\pi)$. L'application $\pi \mapsto \theta(\pi)$ est une bijection entre l'ensemble des représentations lisses irréductibles π de $\widetilde{G}$ telles que $\Theta(\pi) \neq 0$ et l'ensemble des représentations lisses irréductibles π' de $\widetilde{G'}$ telles que $\Theta(\pi') \neq 0$. Elle est appelée la correspondance de Howe. Nous nous proposons de montrer un théorème similaire pour les paires duales de type II, valable pour tout p, et d'expliciter, en termes des paramètres de Langlands, la correspondance $\pi \mapsto \theta(\pi)$, ce qui détermine l'ensemble des représentations π telles que $\Theta(\pi) \neq 0$.

Dans le cas des paires duales de type II, Roger Howe, dans un manuscrit non publié, avait prouvé la bijectivité de la correspondance. Notre méthode, différente, rend, de plus, la correspondance explicite.

Passons à une présentation plus détaillée des résultats :

Soit D une algèbre à division de centre F de dimension finie d^2 sur F et soient n et m des entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{n,m}$ (resp. $\mathcal{M}_n$) l'ensemble des matrices $n \times m$ (resp. $n \times n$) à coefficients dans D. Le groupe $\mathrm{GL}_n(D)$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n$ sera noté G_n. Notons $\omega_{n,m}$ la restriction de la représentation métaplectique à la paire duale $G_n \times G_m$ (voir (1.4) pour plus de détails).

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

THÉORÈME 1 (voir corollaire 6.3). – *Soit π une représentation lisse irréductible de G_n.*

1. *Si $\mathrm{Hom}_{G_n}(\omega_{n,m}, \pi) \neq 0$, alors il existe une unique représentation lisse irréductible π' de G_m telle que*
$$\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\omega_{n,m}, \pi \otimes \pi') \neq 0.$$
De plus, $\dim(\mathrm{Hom}_{G_n \times G_m}(\omega_{n,m}, \pi \otimes \pi')) = 1$.
2. *Supposons $n \leq m$. Alors $\mathrm{Hom}_{G_n}(\omega_{n,m}, \pi) \neq 0$ et, si π est le quotient de Langlands (cf. section 6) de l'induite parabolique $\tau_1 \times \cdots \times \tau_N$, où $\tau_1, \ldots, \tau_N$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable, alors π' est le quotient de Langlands de*
$$\nu^{-\frac{m-n-1}{2}} \times \cdots \times \nu^{\frac{m-n-1}{2}} \times \widetilde{\tau_1} \times \cdots \times \widetilde{\tau_N},$$
où, pour toute représentation τ, $\widetilde{\tau}$ désigne sa contragrédiente.

Dans le cas particulier où $D = F$, notons π^* les paramètres galoisiens de Langlands de la représentation π, c'est-à-dire, π^* est la représentation de degré n du groupe de Weil W_F d'une clôture algébrique $\overline{F}$ sur F qui correspond par [8] ou [9] à π. Alors les paramètres de $\theta(\pi)$ sont $\widetilde{\pi}^* \oplus 1^*_{m-n}$ où on a noté 1^*_{m-n} les paramètres galoisiens de la représentation triviale de G_{m-n}.

La preuve du théorème 1 se décompose en trois parties. D'abord, la théorie des fonctions zêta de Godement-Jacquet [6] nous fournit un entrelacement entre $\omega_{n,n}$ et $\pi \otimes \widetilde{\pi}$ pour toute représentation lisse irréductible π de G_n, ce qui implique, avec un argument classique (*cf.* [14, 3.III.5]), que, si $n \leq m$, alors $\mathrm{Hom}_{G_n}(\omega_{n,m}, \pi) \neq 0$.

Pour montrer l'unicité de la représentation $\theta(\pi)$, on a besoin d'utiliser l'article [13] où il est prouvé que l'induite parabolique d'une représentation irréductible a, dans beaucoup de cas, une seule sous-représentation irréductible.

Dans la section 2, on décrit explicitement le *bord* de la représentation métaplectique : le concept de bord apparaît dans [7, Definition 4.6] pour les paires duales de type I. On calcule une filtration naturelle de la représentation métaplectique et on dit qu'une représentation n'apparaît pas dans le bord si elle provient du dernier cran. On trouve que, pour toute telle représentation π, la représentation $\theta(\pi)$ est unique.

Après, dans la section 3, on s'inspire de l'article [11], et on calcule une filtration des foncteurs de Jacquet de la représentation métaplectique. Ceci nous permet de montrer dans les sections 4 et 5, par récurrence, l'unicité de la représentation $\theta(\pi)$, pour les *bonnes* représentations π. Les *mauvaises* représentations sont celles qui ont un foncteur de Jacquet bien précis. Or, ces représentations n'apparaissent pas dans le bord de la représentation métaplectique !

Pour montrer le paramétrage de la correspondance on a, à nouveau, deux cas. Par récurrence, le cas des *bonnes* représentations n'est pas très difficile et découle de [13, Corollaire A.3]. Pour les autres, on utilise, dans la section 9, des propriétés subtiles de la classification de Zelevinsky-Tadić des représentations irréductibles en termes de segments.

Je voudrais particulièrement remercier Colette Mœglin qui m'a prodigué nombre de conseils et idées, ainsi que Guy Henniart pour toutes ses suggestions et critiques. Je remercie aussi Takuya Konno, Goran Muić et Vincent Sécherre pour les remarques et les corrections qu'ils m'ont faites à propos de cet article.

1. Préliminaires

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 0$, D une algèbre à division de centre F et de dimension finie d^2 sur F.

Soient n, m deux entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{n,m}$ (resp. $\mathcal{M}_n$) l'ensemble des matrices $n \times m$ (resp. $n \times n$) à coefficients dans D et $\mathrm{Nrd} : \mathcal{M}_n \to F$ la norme réduite. Le groupe $\mathrm{GL}_n(D)$ des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n$ sera noté G_n. Le groupe trivial sera noté G_0.

À toute partition (ordonnée) $\alpha = (n_1, \ldots, n_r)$ de l'entier n, correspond une décomposition en blocs des matrices carrées d'ordre n. On notera M_α le sous-groupe de G_n formé des matrices inversibles diagonales par blocs (les blocs étant dans $\mathcal{M}_{n_i,n_i}$, pour $1 \leq i \leq r$), P_α (resp. $\overline{P}_\alpha$) le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) par blocs, et U_α le sous-groupe de P_α formé des éléments dont les blocs diagonaux sont des matrices unité. Le sous-groupe $\overline{P}_\alpha$ est conjugué à $P_{\overline{\alpha}}$ dans G_n avec $\overline{\alpha} = (n_r, \ldots, n_1)$.

Dans cet article, on ne considérera que des représentations lisses complexes et le mot *représentation* voudra toujours dire *représentation lisse complexe*. On notera $\mathrm{Irr}(G_n)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G_n. La représentation triviale de G_n sera notée 1_n.

Si π et π' sont deux représentations d'un groupe G, on notera

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi')$$

l'espace des entrelacements entre π et π'. On omettra l'indice G quand il n'y a pas de confusion.

On note $\sharp\text{-}r^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r}$ (resp. $\sharp\text{-}\overline{r}^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r}$) le foncteur de Jacquet non normalisé associé au parabolique standard P_α (resp. $\overline{P}_\alpha$). On note

$$r^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r} = \delta^{-1/2}_{P_\alpha}\sharp\text{-}r^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r},$$
$$(\text{resp. } \overline{r}^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r} = \delta^{-1/2}_{\overline{P}_\alpha}\sharp\text{-}\overline{r}^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r}),$$

le foncteur de Jacquet normalisé.

Etant donnée une représentation ρ_i de chaque G_{n_i}, on notera

$$\sharp\!-\operatorname{ind}^{G_n}_{P_\alpha}(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r)$$

l'induite parabolique non normalisée, où on a prolongé la représentation $\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r$ trivialement sur U_α.

On note aussi $\rho_1\times\cdots\times\rho_r$ la représentation

$$\operatorname{ind}^{G_n}_{P_\alpha}(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r) = \delta^{1/2}_{P_\alpha}\sharp\!-\operatorname{ind}^{G_n}_{P_\alpha}(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r),$$

induite parabolique normalisée.

Soit π une représentation de G_n ; on a un isomorphisme canonique (réciprocité de Frobenius) :

$$\operatorname{Hom}(\pi,\rho_1\times\cdots\times\rho_r)\simeq\operatorname{Hom}\left(r^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r}(\pi),\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r\right). \tag{1.1}$$

On a une formule similaire pour l'induction non normalisée et le foncteur de Jacquet non normalisé. On dispose aussi d'un isomorphisme de réciprocité *à la Casselman* (*cf.* [1, Theorem 20] ou bien [4]) :

$$\operatorname{Hom}(\rho_1\times\cdots\times\rho_r,\pi)\simeq\operatorname{Hom}\left(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r,\overline{r}^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r}(\pi)\right). \tag{1.2}$$

Pour l'induction parabolique et le foncteur de Jacquet non normalisés, la formule précédente devient :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Hom}\left(\sharp\!-\operatorname{ind}^{G_n}_{P_\alpha}(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r),\pi\right)\simeq\\ &\qquad\operatorname{Hom}\left(\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r,\delta_{P_\alpha}\sharp\text{-}\,\overline{r}^{G_n}_{n_1,\ldots,n_r}(\pi)\right).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Soient $n,t\in\mathbb{Z}$, $1\le t\le n$, $\pi\in\operatorname{Irr}(G_n)$, $\chi\in\operatorname{Irr}(G_t)$. On notera $\operatorname{Jac}_\chi(\pi)\neq 0$ (resp. $\overline{\operatorname{Jac}}_\chi(\pi)\neq 0$) s'il existe $\rho\in\operatorname{Irr}(G_{n-t})$ tel que $\operatorname{Hom}(\pi,\chi\times\rho)\neq 0$ (resp. $\operatorname{Hom}(\pi,\rho\times\chi)\neq 0$).

On utilisera à plusieurs reprises la proposition suivante [13, Proposition 7.1] :

PROPOSITION 1.1. – *Soient n,m deux entiers positifs, $n\le m$, $\pi\in\operatorname{Irr}(G_n)$, $\pi'\in\operatorname{Irr}(G_m)$ et ρ une représentation cuspidale irréductible de G_{m-n}. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\operatorname{Hom}(\pi',\pi\times\rho)\neq 0$;
2. $\operatorname{Hom}(\rho\times\pi,\pi')\neq 0$.

COROLLAIRE 1.2. – *Soient π,π' deux représentations irréductibles et ρ une représentation cuspidale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\operatorname{Hom}(\pi',\pi\times\rho\times\cdots\times\rho)\neq 0$;
2. $\operatorname{Hom}(\rho\times\cdots\times\rho\times\pi,\pi')\neq 0$.