ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 41 fascicule 6 novembre-décembre 2008

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

David MARÍN & Jean-François MATTEI

Incompressibilité des feuilles de feuilletages holomorphes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4[e] série, t. 41, 2008, p. 855 à 903

INCOMPRESSIBILITÉ DES FEUILLES DE GERMES DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES SINGULIERS

PAR DAVID MARÍN* ET JEAN-FRANÇOIS MATTEI

RÉSUMÉ. – Nous considérons un germe de feuilletage holomorphe singulier non-dicritique $\mathcal{F}$ défini sur une boule fermée $\overline{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$, satisfaisant des hypothèses génériques, de courbe de séparatrice S. Nous démontrons l'existence d'un voisinage ouvert U de S dans $\overline{\mathbb{B}}$ tel que, pour toute feuille L de $\mathcal{F}_{|(U\setminus S)}$, l'inclusion naturelle $\imath : L \hookrightarrow U \setminus S$ induit un monomorphisme $\imath_* : \pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(U \setminus S)$ au niveau du groupe fondamental. Pour cela, nous introduisons la notion géométrique de « connexité feuilletée » avec laquelle nous réinterprétons la notion d'incompressibilité. Nous montrons aussi l'existence de sections holomorphes transverses satisfaisant la propriété de connexité feuilletée ; elles nous permettent d'introduire une notion de « représentation de monodromie globale » du feuilletage.

ABSTRACT. – We consider a non-dicritic germ of singular holomorphic foliation $\mathcal{F}$ defined in some closed ball $\overline{\mathbb{B}} \subset \mathbb{C}^2$ with separatrix set S, satisfying some additional but generic hypotheses. We prove that there exists an open subset $U \supset S$ of $\mathbb{B}$, such that for every leaf L of $\mathcal{F}_{|(U\setminus S)}$ the natural inclusion $\imath : L \hookrightarrow U \setminus S$ induces a monomorphism $\imath_* : \pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(U \setminus S)$ at the fundamental group level. To do this, we introduce the geometrical notion of "foliated connexity" and we re-interpret the incompressibility using it. We also show the existence of some special transverse holomorphic sections, which allow us to introduce a "global monodromy representation" for the foliation.

Introduction et résultat principal

Soit $\mathcal{F}_\omega$ un feuilletage holomorphe singulier défini par une 1-forme différentielle ω à coefficients holomorphes sur la boule ouverte $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$ de centre l'origine $0 = (0,0)$ et de rayon $\varepsilon > 0$. Nous supposons ω à singularité isolée en 0 et *non-dicritique* [11], i.e. les germes à l'origine de courbes analytiques irréductibles S_j telles que $\omega_{|S_j} \equiv 0$, appelées *séparatrices de* $\mathcal{F}_\omega$, sont en nombre fini, $j = 1, \ldots, \varrho$, et non-nul d'après [4]. Nous choisissons ε_0 assez petit pour que, dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_0}$, *la séparatrice totale* $S := \bigcup_{j=1}^{\varrho} S_j$ soit analytique fermée, à singularité isolée 0 et transverse à chaque sphère $\partial\overline{\mathbb{B}}_r$, $0 < r \leq \varepsilon_0$. Nous fixons

* Le premier auteur a été partiellement financé par la FEDER / Ministerio de Educación y Ciencia d'Espagne, project MTM2004-00566.

0012-9593/06/© 2008 Société Mathématique de France. Tous droits réservés

aussi une fonction holomorphe réduite f à valeurs dans le disque $\mathbb{D}_{\eta'} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < \eta'\}$, qui définit S sur $\overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_0}$. La restriction de f à l'ouvert

$$T_\eta := f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0}\,, \qquad 0 < \eta \ll \varepsilon_0\,,$$

que nous appellerons ici *tube de Milnor*, est une fibration différentiable [13] localement triviale au-dessus du disque épointé $\mathbb{D}^*_\eta := \mathbb{D}_\eta \setminus \{0\}$. Notons

$$T^*_\eta := T_\eta \setminus S = f^{-1}(\mathbb{D}^*_\eta) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0}\,. \tag{1}$$

Lorsque f est une intégrale première de $\mathcal{F}_\omega$, pour chaque feuille L de la restriction $\mathcal{F}_{\omega\,|T^*_\eta}$ de $\mathcal{F}_\omega$ à T^*_η, la suite exacte d'homotopie donne :

$$1 \to \pi_1(L) \xrightarrow{\imath_*} \pi_1(T^*_\eta) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbb{D}^*_\eta) \to 1\,,$$

où $\imath : L \hookrightarrow T^*_\eta$ désigne l'inclusion naturelle. En particulier, les feuilles de $\mathcal{F}_{\omega\,|T^*_\eta}$ sont incompressibles dans T^*_η. L'objet de ce travail est de démontrer un résultat analogue dans un cadre général, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{F}_\omega$ n'admet plus nécessairement une intégrale première holomorphe.

Considérons $E : \mathcal{T}_\eta \to T_\eta$ le morphisme de réduction de $\mathcal{F}_\omega$, cf. [17] ou [11]. Le *transformé total* $\mathcal{D} := E^{-1}(S)$ *de* S, que nous appelons ici *diviseur total*, est à croisements normaux. Ses composantes irréductibles sont : les composantes irréductibles $\mathcal{E}_j$, $j = 1, \ldots, \kappa$ du *diviseur exceptionnel* $\mathcal{E} := E^{-1}(0)$ et les *transformées strictes* $\mathcal{S}_j := \overline{E^{-1}(S_j) \setminus \mathcal{E}}$ des séparatrices, $j = 1, \ldots, \varrho$. L'image réciproque $E^*\omega$ permet de définir sur $\mathcal{T}_\eta$ un feuilletage $\mathcal{F}$ à singularités isolées, dont le *lieu singulier* $Sing(\mathcal{F})$ est contenu dans $\mathcal{E}$. En chaque point $c \in Sing(\mathcal{F})$, le germe $\mathcal{F}_c$ de $\mathcal{F}$ peut être décrit par un germe de 1-forme $\widetilde{\omega}_c$ qui s'écrit, dans des coordonnées z_1, z_2 appropriées :

$$\widetilde{\omega}_c = (\lambda_c z_1 + \cdots)dz_2 + (\mu_c z_2 + \cdots)dz_1\,, \quad \text{avec} \quad \mu_c \neq 0\ \ , \lambda_c/\mu_c \notin \mathbb{Q}_{<0}\,, \tag{2}$$

les points de suspension désignant des germes de fonctions holomorphes dont le 1-jet au point c est nul. Nous dirons ici que $\mathcal{F}$ est *de type général* si, pour chaque $c \in Sing(\mathcal{F})$, les assertions suivantes sont satisfaites :

(H1) $\lambda_c\,\mu_c \neq 0$,

(H2) *si λ_c/μ_c est un réel irrationnel, alors le germe $\mathcal{F}_c$ est linéarisable.*

La condition (H1) exprime le fait que $\mathcal{F}_c$ n'est pas une selle-nœud ; la réalisation de (H1) en tout point $c \in Sing(\mathcal{F})$ signifie que $\mathcal{F}_\omega$ est une courbe généralisée au sens de [3]. Comme nous avons supposé aussi que $\mathcal{F}_\omega$ est non-dicritique, toujours d'après [3], le morphisme de réduction E est le même que le morphisme de réduction de la séparatrice totale S. Concernant la condition (H2), rappelons que si λ_c/μ_c est un irrationnel < 0, ou bien s'il appartient à un ensemble $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}_+$ de mesure pleine, appelé ensemble de Brjuno [20], alors le germe $\mathcal{F}_c$ est toujours linéarisable.

THÉORÈME PRINCIPAL. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de feuilletage holomorphe singulier non-dicritique, de type général et soit T_{η_0} un tube de Milnor pour la séparatrice totale S. Alors il existe un voisinage ouvert U de S dans $\overline{T}_{\eta_0}$ tel que :*

(TP1) *l'inclusion $(U \setminus S) \hookrightarrow (T_{\eta_0} \setminus S)$ induit un isomorphisme*

$$\pi_1(U \setminus S, \cdot) \xrightarrow{\sim} \pi_1(T_{\eta_0} \setminus S, \cdot),$$

(TP2) *toute feuille L de la restriction $\mathcal{F}_{\omega\,|(U\setminus S)}$ est incompressible dans $(U \setminus S)$, i.e. l'inclusion naturelle $\imath : L \hookrightarrow (U \setminus S)$ induit un monomorphisme des groupes fondamentaux*

$$\imath_* : \pi_1(L\,,\cdot) \hookrightarrow \pi_1(U \setminus S\,,\cdot),$$

(TP3) *U contient T_η, pour $\eta > 0$ assez petit.*

Il est bien connu [13] que l'application d'inclusion de $(T_{\eta_0} \setminus S)$ dans $(\mathbb{B}_{\varepsilon_0} \setminus S)$ induit un isomorphisme au niveau du groupe fondamental. Ainsi le théorème précédent permet de construire un système fondamental $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages ouverts de S dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}}_{\varepsilon_0}$ tel que, pour tout n, chaque feuille de $\mathcal{F}_{\omega|(U_n\setminus S)}$ est incompressible dans $(\mathbb{B}_{\varepsilon_0} \setminus S)$. D'autre part, nous verrons dans la section 5 comment, en appliquant le théorème classique de Seifert-Van Kampen de façon récurrente, on peut obtenir (5.1.4) une présentation explicite de $\pi_1(U \setminus S)$ ayant comme système de générateurs un ensemble de lacets $\{a_D\}$, indexé par les composantes irréductibles $\{D\}$ du diviseur total $\mathcal{D}$, vérifiant $\frac{1}{2i\pi}\int_{a_D}\frac{dF}{F} = \mathrm{ord}_D F$, où $F = f \circ E$, et ayant pour relations

$$\prod_{D\subset\mathcal{D}} a_D^{(D,E)} = 1, \qquad [a_D, a_E]^{(D,E)} = 1, \qquad E \subset \mathcal{E}, \quad D \subset \mathcal{D}. \tag{3}$$

Remarquons que génériquement les feuilles de $\mathcal{F}$ dont le groupe fondamental est non-nul forment un ensemble dense. C'est en effet le cas lorsque le groupe d'holonomie d'une composante du diviseur exceptionnel est non-résoluble. Il existe alors [1] un ensemble dense de points fixes attractifs d'éléments du pseudo-groupe d'holonomie. Ces points correspondent nécessairement à des lacets tracés dans une feuille qui sont homotopiquement non-triviaux. La densité pour la topologie de Krull de ce type de feuilletages est montrée dans [6].

Les hypothèses que nous donnons ici peuvent être affaiblies ; en particulier il est possible d'adapter l'énoncé et la preuve de ce résultat pour inclure les feuilletages dicritiques. Dans un travail en cours de rédaction, nous donnons des énoncés plus généraux qui portent sur les feuilletages holomorphes au voisinage d'un diviseur compact et pouvant éventuellement posséder des composantes dicritiques.

La structure détaillée de l'article est la suivante. Au chapitre 1, nous introduisons la notion très générale de « 1-connexité feuilletée » (1.2.2) d'un sous-ensemble T dans variété feuilletée M. Cette propriété du couple (T, M), que nous notons $T \overset{1}{\underset{\mathcal{F}}{\hookrightarrow}} M$, est assez simple ; elle signifie que, s'il est possible d'homotoper un chemin b tracé dans une feuille L à un chemin a tracé dans T, alors il existe aussi une homotopie dans L qui relie b à un chemin c tracé dans T et de plus, c et a sont homotopes dans T. Dans le cas particulier où T est un point, cette propriété est équivalente à l'incompressibilité de la feuille contenant ce point. Ainsi la propriété (TP2) du théorème principal s'exprime par la 1-connexité feuilletée de tout point dans U. Cette notion satisfait d'intéressantes propriétés. Tout d'abord la propriété de transitivité suivante, qui autorise des constructions de proche en proche : dans la situation $U' \subset U'' \subset U'''$, la 1-connexité feuilletée de U' dans U'' et de U'' dans U''' implique la 1-connexité feuilletée de U' dans U'''. Ensuite (1.3.1) un théorème de type Van Kampen, qui sera l'outil utilisé pour effectuer chaque pas d'une telle construction : dans la situation $U' \subset U''$, si U'' est obtenu par collage de U' avec un ouvert U'_1 le long d'une hypersurface réelle T, alors la 1-connexité feuilletée de T dans U' et dans U'_1, implique la 1-connexité feuilletée de U' dans U''. Pour prouver la propriété (TP2), nous adoptons alors la stratégie qui consiste à construire U en collant des morceaux simples U_j satisfaisant la propriété (TP2) et effectuer des collages le long d'hypersurfaces réelles $T_j := U_{j-1} \cap U_j$ satisfaisant des hypothèses du théorème de type Van Kampen :

$$U = \bigcup_{j=1}^{k} U_j\,, \quad T_j \overset{1}{\underset{\mathcal{F}}{\hookrightarrow}} U_{j-1}\,, \quad T_j \overset{1}{\underset{\mathcal{F}}{\hookrightarrow}} U_j\,.$$

En posant $U^r := \bigcup_{j=0}^{r} U_j$, on obtient $\{c\} \overset{1}{\underset{\mathcal{F}}{\hookrightarrow}} U^0 \overset{1}{\underset{\mathcal{F}}{\hookrightarrow}} \cdots \overset{1}{\underset{\mathcal{F}}{\hookrightarrow}} U^k = U$, quel que soit le point c de U_0. Ceci donne la propriété (TP2) puisque, quitte à renuméroter, l'ouvert U_0 peut être choisi arbitrairement.

Cette technique, que nous appelons « assemblage bord à bord feuilleté », est précisée en (2.1.1). Elle peut être considérée comme un procédé de plombage [5], mais dans un cadre feuilleté. Elle permet de localiser le problème. En effet nous sommes ramenés à construire des ouverts U_j nettement plus petits que U, satisfaisant la propriété (TP2). Cependant cette construction ne sera pas arbitraire. La décomposition $U = \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ aura un sens topologique intrinsèque. Elle correspond, à raffinement près, à la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson du complémentaire, dans la sphère $\partial\mathbb{B}_{\varepsilon_0}$, de l'entrelacs défini par la séparatrice totale S. Il est bien connu [18] que cette décomposition s'explicite à partir de l'arbre dual du diviseur $\mathcal{D}$ de désingularisation de S. Ce seront les pièces d'une décomposition similaire de $\mathcal{D}$ effectuée en (2.2) qui nous serviront de support à la construction des ouverts U_j.

Notons que la seule propriété (TP2) ne donne pas un théorème intéressant, puisqu'on serait tenté de compliquer artificiellement la topologie de U, afin que son groupe fondamental contienne celui de chaque feuille. Ce ne sera pas le cas de notre construction car, pour satisfaire aussi les propriétés (TP1) et (TP3), nous chercherons à préserver une présentation du groupe fondamental de $U \setminus S$, celle qui correspond à celle du complémentaire de S dans un tube de Milnor. Pour cela, la topologie des blocs U_j et de leurs bords T_j devra être la plus simple possible.

Tout d'abord les T_j seront des ensembles « de type suspension » (3.1.1) : ils sont construits à partir d'un disque Σ transverse au feuilletage, par transport holonome le long d'un lacet δ tracé dans $\mathcal{D}$, faisant un tour autour d'une singularité de $\mathcal{D}$. Ainsi T_j est obtenu à partir du cylindre $\Sigma\times[0,1]$ en recollant les deux faces $\Sigma\times 0$ et $\Sigma\times 1$ par le difféomorphisme h d'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de δ. La topologie d'un tel ensemble peut être compliquée, car $\partial(\Sigma\cup h(\Sigma))$ peut avoir plusieurs composantes connexes. Ce n'est pas le cas lorsque $\partial h(\Sigma)$ est C^1-proche de $\partial\Sigma$. Par exemple, si $\partial\Sigma$ est un cercle suffisamment petit dans une coordonnée z appropriée, le collage h est presque $\mathbb{C}$-linéaire et $\Sigma\cup h(\Sigma)$ est étoilé (dans la coordonnée z). Dans ce cas T_j aura la topologie d'un tore. Pour mesurer la « distorsion » entre $\partial h(\Sigma)$ et $\partial\Sigma$, nous introduisons en (3.1.2) la notion de « rugosité ». En (3.1.5) nous estimons la rugosité de $h(\Sigma)$ en fonction de la taille et de la rugosité de Σ. De cette manière nous enrichissons la construction de proche en proche décrite ci-dessus, en introduisant un contrôle de la rugosité des bords des pièces U_j. La preuve du théorème principal se réduit ainsi à celle du théorème (3.2.1). Celui-ci assure, pour chaque pièce du diviseur, l'existence d'un bloc U_j avec : une composante connexe de ∂U_j imposée (celle qui servira au collage avec U_{j-1}), une petite rugosité de toutes autres composantes de ∂U_j et la 1-connexité feuilletée de chaque composante de ∂U_j dans U_j ; il suffit pour cela que la rugosité de la composante imposée soit suffisamment petite.