ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 42 fascicule 1 janvier-février 2009

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Daniel CARO

D-modules arithmétiques surholonomes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 42, 2009, p. 141 à 192

$\mathcal{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES SURHOLONOMES

PAR DANIEL CARO

RÉSUMÉ. – Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, U une variété sur k et F une puissance de Frobenius. Nous construisons la catégorie des $(F\text{-})\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes sur U et celle des $(F\text{-})$complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur U surholonomes. Nous montrons que les complexes surholonomes sont stables par images directes, images inverses, images inverses extraordinaires, images directes extraordinaires, foncteurs duaux. De plus, lorsque U est lisse, nous vérifions que les F-isocristaux surconvergents unités sur U sont surholonomes. Cela implique leur holonomie, ce qui prouve en partie une conjecture de Berthelot.

ABSTRACT. – Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$, U be a variety over k and F be a power of Frobenius. We construct the category of overholonomic arithmetic $(F\text{-})\mathcal{D}$-modules over U and the category of overholonomic $(F\text{-})$complexes of arithmetic $\mathcal{D}$-modules over U. We show that the overholonomicity is stable under direct images, inverse images, extraordinary inverse images, extraordinary direct images, dual functors. Moreover, when U is smooth, we check that unit-root overconvergent F-isocrystals on U are overholonomic. This implies that they are holonomic, which proves in part a Berthelot's conjecture.

Introduction

Donnons-nous $\mathbb{F}_q$, un corps fini de caractéristique p, et X une variété sur $\mathbb{F}_q$ (i.e. un $\mathbb{F}_q$-schéma séparé et de type fini). Afin de prouver la rationalité de la fonction zêta de Weil associée à X et surtout de leur donner une interprétation cohomologique qui fut conjecturée par Weil, l'idée de Grothendieck fut de généraliser ces fonctions à des coefficients sur X plus généraux, le *coefficient constant* redonnant la fonction zêta de X. Ces coefficients, les $\mathbb{Q}_l$-faisceaux (pour la topologie étale) constructibles, avec l un nombre premier différent de p, vérifient les trois propriétés fondamentales suivantes :

L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

1. Lorsque X est réduit à un point, les $\mathbb{Q}_l$-faisceaux constructibles sont les $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels de dimension *finie*.
2. Ils contiennent les coefficients constants.
3. Ils sont stables par les *six opérations cohomologiques de Grothendieck*, à savoir $\otimes$, $\mathcal{H}om$, f_*, f^*, $f_!$ et $f^!$.

Les opérations cohomologiques permettent de changer de variétés. Afin d'établir l'interprétation cohomologique des fonctions, dites L, associées aux $\mathbb{Q}_l$-faisceaux constructibles, il procède alors, grâce à la stabilité de la constructibilité, à une récurrence sur la dimension de X (en effectuant des fibrations).

Nous aimerions avoir une analogie p-adique de ceci, i.e. bénéficier d'une catégorie de $\mathbb{Q}_p$-objets (e.g. $\mathbb{Q}_p$-faisceaux ou complexes de $\mathbb{Q}_p$-faisceaux) vivant sur X et vérifiant les trois propriétés ci-dessus. Pour y parvenir, l'idée de Berthelot est, en s'inspirant de la caractéristique nulle, d'élaborer une théorie de $\mathcal{D}$-*modules arithmétiques*.

Plus précisément, soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$ de corps résiduel parfait k, $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse et P sa fibre spéciale. Berthelot construit alors le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini et de niveau fini sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$ (voir [5]), qui s'interprète d'après Noot-Huyghe (voir [32]) comme le complété p-adique faible tensorisé par $\mathbb{Q}$ du faisceau des opérateurs différentiels usuels sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$. D'où la notion de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur $\mathcal{P}$, i.e. de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules (toujours à gauche par défaut). Il construit aussi les opérations cohomologiques suivantes (voir [7, 2,3,4]) : le produit tensoriel externe $\boxtimes$, le foncteur dual $\mathbb{D}$ et, pour tout morphisme $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, l'image directe f_+ et l'image inverse extraordinaire $f^!$. Il définit ensuite la notion de F-complexes holonomes (le symbole « F » signifie que les complexes sont munis d'une action de Frobenius) en s'inspirant de la caractéristique nulle ([7, 5]). L'holonomie est préservée par produit tensoriel externe (Berthelot : [7]) et par foncteur dual (Virrion : [35]). Berthelot conjecture la préservation de l'holonomie par image directe par un morphisme propre et par image inverse extraordinaire (voir [7, 5.3.6]). Si ces conjectures étaient exactes, nous pourrions alors définir la notion de F-complexes holonomes sur une k-variété et construire, pour tout morphisme g de k-variétés, les foncteurs image directe g_+, image inverse g^+, image directe extraordinaire $g_!$ et image inverse extraordinaire $g^!$ (de façon analogue à ceux définis ici dans 4.19 pour les complexes surholonomes). Ainsi, les F-complexes holonomes (sur les k-variétés) constitueraient une catégorie de coefficients p-adiques stables par les six opérations cohomologiques de Grothendieck $\mathbb{D}$, $\boxtimes$, g_+, g^+, $g_!$, $g^!$.

Cependant, afin de disposer d'une cohomologie p-adique stable, nous proposons ici une approche légèrement différente : nous remplaçons l'étude de l'holonomie par celle de la *surholonomie*. Pour l'instant, les liens entre ces deux notions sont les suivants : un F-$\mathcal{D}$-module arithmétique surholonome est holonome. De plus, la réciproque est validée si et seulement si la conjecture sur la stabilité de l'holonomie par foncteur cohomologique local est exacte (voir 8.2).

Décrivons maintenant le contenu de cet article.

Nous donnons dans la première partie quelques rappels sur les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques qui nous seront utiles. Nous formulons dans une deuxième partie un critère d'holonomie. Il nous permettra d'établir qu'un F-$\mathcal{D}$-module arithmétique surholonome est holonome.

Nous introduisons dans le troisième chapitre la notion de $(F\text{-})\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules surholonomes et de $(F\text{-})$complexes de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules surholonomes. Soit $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Nous prouvons la stabilité de la surholonomie par foncteurs duaux, par foncteurs cohomologiques locaux, par image inverse extraordinaire et image inverse par f. De plus, lorsque f est propre, nous obtenons sa stabilité par foncteur image directe et image directe extraordinaire par f. La stabilité par produits tensoriels (internes et externes) sera étudiée dans un prochain travail (voir [19] puis [20]).

Nous construisons dans la quatrième partie, pour toute k-variété U *plongeable* dans un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, la catégorie des *$(F\text{-})$complexes surholonomes sur U* que l'on note $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_U)$. Nous définissons ensuite le foncteur dual sur U noté $\mathbb{D}_U : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_U) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_U)$. Pour tout morphisme $g : U' \to U$ de k-variétés (on suppose ici qu'il existe des $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses dans lesquels U et U' peuvent se plonger respectivement), nous construisons, sur les catégories de F-complexes surholonomes correspondantes, les foncteurs image directe, image directe extraordinaire, image inverse extraordinaire, image inverse par g que l'on désigne respectivement par g_+, $g_!$, $g^!$, g^+ (voir 4.19). De plus, nous prouvons la stabilité de la surholonomie par celles-ci.

Dans la cinquième partie, nous étendons, pour toute variété U sur k, la construction de la catégorie des *$(F\text{-})\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes sur U*, que l'on note $(F\text{-})\mathfrak{M}^{+}_{U}$. On obtient la catégorie $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}(\mathfrak{M}^{+}_{U})$, ce qui donne un analogue de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}_U)$. On définit de plus le « coefficient constant sur U » noté $\mathcal{O}_U$.

Soit U une variété sur k se plongeant dans un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse. Dans une sixième partie, nous définissons les fonctions L associées aux F-complexes surholonomes sur U et nous en donnons une formule cohomologique. Cela correspond à une extension de la formule cohomologique d'Étesse et Le Stum des fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents sur U (voir [22]). La preuve se fait par récurrence sur la dimension de U en se ramenant à la situation géométrique déjà connue (celle de [11]). Remarquons que l'hypothèse que U se plonge dans un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse est sûrement évitable (il s'agirait d'étendre les opérations cohomologiques via des diagrammes de topos [1, V.3.4.1]), mais nous ne nous sommes pas intéressé à ce point.

Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, X un sous-schéma fermé lisse de P et T un diviseur de P tels que $T_X := T \cap X$ soit un diviseur de X. Berthelot a vérifié l'holonomie des F-isocristaux *convergents* sur P, i.e. des $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-cohérents (voir [7, 5]). Par contre, quoique ayant validé sa cohérence différentielle (voir [3]), il conjecture l'holonomie du coefficient constant $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ (voir [7, 5.3.6.D]). Dans la septième partie de cet article, nous démontrons que les F-isocristaux surconvergents unités sur $X \setminus T_X$ surconvergents le long de T_X sont surholonomes. Cela implique, pour n'importe quelle k-variété U, que le coefficient constant $\mathcal{O}_U$ est surholonome. De plus, nous vérifions que, pour toute variété U lisse sur k, le $F\text{-}\mathcal{D}_U$-module arithmétique associé à un F-isocristal unité surconvergent sur U (voir 1.20) est surholonome. En particulier, on obtient leur holonomie, ce qui confirme la conjecture de Berthelot (voir [7, 5.3.6.D]). Il faut noter que l'utilisation de la surholonomie (et surtout de sa stabilité) est l'élément clé de la preuve. La stabilité de la surholonomie permet ainsi de résoudre des problèmes sur l'holonomie.

Dans [14, 4], lorsque $\mathcal{P}$ est une courbe propre et lisse et $P = X$, nous avions établi l'holonomie des F-isocristaux surconvergents sur $X \setminus T_X$, ce qui avait étendu les premiers exemples de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules holonomes sur les courbes de Berthelot de [2, 5]. Plus généralement, grâce à [16] puis avec la collaboration de Tsuzuki dans [20], nous obtiendrons la surholonomie des F-isocristaux surconvergents sur une variété lisse U. Ce résultat repose sur le théorème Kedlaya de réduction semi-stable en dimension supérieure (voir [26], [27], [29] et [30]). Par dévissage en F-isocristaux surconvergents (voir [13]), cela entraîne la stabilité par produits tensoriels de la surholonomie avec structure de Frobenius (voir [20]).

Nous prouvons dans la dernière partie que la conjecture [7, 5.3.6.B] de Berthelot sur la stabilité de l'holonomie par image inverse extraordinaire implique que les notions d'holonomie, de surholonomie, de surcohérence sont identiques. On en déduit que cette conjecture [7, 5.3.6.B] entraîne en particulier (pour une version plus générale voir 8.9) la stabilité de l'holonomie par image directe par un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses (ce qui était conjecturé dans [7, 5.3.6.A]).

Notations

Tout au long de cet article, nous garderons les notations suivantes : les schémas formels seront notés par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par les lettres romanes correspondantes. Si $f : X' \to X$ est un morphisme de schémas ou de schémas formels, on note d_X la dimension de X et $d_{X'/X}$ la dimension relative. De plus, la lettre $\mathcal{V}$ désignera un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, de corps de fractions K de caractéristique 0. On fixe $s \geq 1$ un entier naturel et F sera la puissance s-ième de l'endomorphisme de Frobenius. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau abélien, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ désignera $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Lorsque cela n'est pas précisé, les modules sont des modules à gauche, les *variétés* sont des variétés sur k, i.e. des k-schémas séparés et de type fini. Tous les k-schémas seront *réduits*. Lorsque nous considérerons des produits de $\mathcal{V}$-schémas formels (resp. k-schémas), nous omettrons parfois d'indiquer Spf $\mathcal{V}$ (resp. Spec k). Lorsque le symbole ensemble vide « $\emptyset$ » apparaît dans une notation, nous ne l'indiquerons pas non plus (e.g. dans les opérations cohomologiques de la section 1 lorsqu'un diviseur est vide ; e.g. « $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ » à la place de « $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(\emptyset)_{\mathbb{Q}}$ »).

Si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux, $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$, $D^{+}(\mathcal{A})$ et $D^{-}(\mathcal{A})$ désignent respectivement les catégories dérivées des complexes de $\mathcal{A}$-modules à cohomologie bornée, bornée inférieurement et bornée supérieurement. Lorsque l'on souhaitera préciser entre droite et gauche, on notera alors $D^{*}({}^{g}\mathcal{A})$ ou $D^{*}(\mathcal{A}^{d})$, où $*$ est l'un des symboles $\emptyset$, $+$, $-$, ou b. De plus, les indices « qc », « coh », « surcoh », « parf » et « hol » signifient respectivement « quasi-cohérent », « cohérent », « surcohérent » « parfait » et « holonome » (voir la section 1).

Remerciements

La surholonomie répond à des questions de K. Kedlaya, B. Le Stum et N. Tsuzuki concernant une extension logique de la notion de surcohérence. Leur intérêt à ce sujet et aussi notamment ceux de A. Abbes et C. Huyghe-Noot ont été une grande source de motivation. Je remercie B. Le Stum et A. Virrion pour leur attention très stimulante relative au critère d'holonomie.