ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 51 fascicule 3 mai-juin 2018

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Fabrizio ANDREATTA & Adrian IOVITA & Vincent PILLONI

Le halo spectral

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Tél. : (33) 04 91 26 74 64
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Abonnement électronique : 420 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 540 €. Hors Europe : 595 € ($ 863). Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 51, 2018, p. 603 à 655

LE HALO SPECTRAL

PAR FABRIZIO ANDREATTA, ADRIAN IOVITA
ET VINCENT PILLONI

RÉSUMÉ. – Nous construisons un espace de formes surconvergentes en caractéristique p, un opérateur compact sur cet espace et nous montrons que la série caractéristique de cet opérateur est la réduction modulo p de la série universelle de Coleman. Nous démontrons que les formes surconvergentes en caractéristique p de pente finie se déforment vers la caractéristique 0.

ABSTRACT. – We construct a space of overconvergent modular forms of characteristic p, a compact operator on this space and we show that the characteristic series of this operator is the reduction modulo p of Coleman's universal series. We prove that finite slope overconvergent modular forms in positive characteristic can be deformed to characteristic 0.

1. Introduction

1.1. Présentation des résultats

Soit p un nombre premier et N un entier premier à p. Soit X la courbe modulaire sur $\mathbb{Z}_p$ de niveau N. Soit $\bar{X}$ sa réduction modulo p, $\bar{X}_{\mathrm{ord}}$ le lieu ordinaire et $\mathfrak{X}_{\mathrm{ord}}$ le schéma formel p-adique lieu ordinaire. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de $\bar{X}_{\mathrm{ord}}$ et $\rho : \Pi_1(\bar{X}_{\mathrm{ord}}, \bar{x}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ la représentation donnée par la tour d'Igusa qui paramètre les trivialisations de la partie multiplicative du module de Tate du schéma semi-abélien universel. Pour tout caractère $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$, l'équivalence de Katz [21] associe à $\kappa \circ \rho$ un ϕ-module étale ω^κ sur $\mathfrak{X}_{\mathrm{ord}}$. Ses sections globales sont l'espace $M_\kappa^{p\text{-ad}}$ des formes modulaires p-adiques de poids κ. L'opérateur de Dwork associé est $U_p = p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi$. Dans [21] si κ est algébrique, puis dans [10] (complété par [12], [7] et revisité dans [3] et [25]), il est démontré que le ϕ-module ω^κ surconverge. Ses sections surconvergentes sont l'espace $M_\kappa^\dagger$ des formes modulaires surconvergentes de poids κ.

L'opérateur U_p est compact et on peut définir, d'après [27], la série caractéristique $\mathscr{P}_\kappa(X) := \det(1 - XU_p|M_\kappa^\dagger)$ qui est une fonction entière de la variable X.

 doi:10.24033/asens.2362

Notons $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Coleman montre de plus l'existence d'une série caractéristique universelle $\mathscr{P}(X) \in \Lambda[[X]]$ qui interpole les différentes séries caractéristiques $\mathscr{P}_\kappa(X)$. Notons $\mathcal{W}^{\mathrm{rig}} = (\mathrm{Spf}\,\Lambda)^{\mathrm{rig}}$ l'espace rigide des poids, qui est une union finie $\coprod \mathcal{W}_\chi^{\mathrm{rig}}$ de boules ouvertes de rayon 1 paramétrées par les caractères $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ (où $q = 4$ si $p = 2$ et $q = p$ sinon). Coleman et Mazur définissent la variété spectrale $\mathscr{Z}^{\mathrm{rig}} = V(\mathscr{P}) \subset \mathcal{W}^{\mathrm{rig}} \times \mathbb{A}^1$. Ses points sont des couples (κ, α^{-1}) où κ est un poids et α une valeur propre non nulle de U_p agissant sur $M_\kappa^\dagger$. Ils définissent également la courbe de Hecke $\mathscr{E}^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{Z}^{\mathrm{rig}}$ dont les points sont des triplets $(\kappa, \alpha^{-1}, \lambda)$ où $(\kappa, \alpha^{-1}) \in \mathscr{Z}^{\mathrm{rig}}$ et λ est un système de valeurs propres de Hecke agissant sur l'espace propre $(M_\kappa^\dagger)^{U_p=\alpha}$.

Bien que la construction de la variété de Hecke soit de nature rigide analytique, il est surprenant que la série caractéristique $\mathscr{P}(X)$ soit à coefficients entiers. Ceci suggère la possibilité d'une théorie entière des formes surconvergentes. Ce travail a pour but d'établir une telle théorie. Notre point de départ est une conjecture de Coleman sur la réduction modulo p de la série caractéristique. Fixons un isomorphisme $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times][[T]]$, en envoyant $\exp(q)$ sur $1+T$. Pour tout caractère χ de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, notons $\mathscr{P}_\chi(X) \in \mathbb{Z}_p[[T]][[X]]$ la χ-partie de $\mathscr{P}(X)$ et $\overline{\mathscr{P}_\chi}(X) \in \mathbb{F}_p[[T]][[X]]$ sa réduction modulo p. Notons aussi $\bar\kappa_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ le caractère obtenu par réduction du caractère universel et projection sur la χ-partie (on remarquera que si $p = 2$, $\bar\kappa_\chi$ est indépendant de χ). Dans [11], Coleman observe que c'est une série entière de la variable X à coefficients dans l'anneau $\mathbb{F}_p[[T]]$ équipé de la topologie T-adique et il conjecture le résultat suivant :

CONJECTURE 1 ([11]). – *Pour chaque caractère χ du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, on possède un $\mathbb{F}_p((T))$-espace de formes surconvergentes $M_{\bar\kappa_\chi}^\dagger$ de poids $\bar\kappa_\chi$ et un opérateur compact U_p dont la série caractéristique est $\overline{\mathscr{P}_\chi}(X)$.*

Pour tout caractère $\bar\kappa_\chi$ comme au-dessus, l'équivalence de Katz associe à $\bar\kappa_\chi \circ \rho : \Pi_1(\bar X_{\mathrm{ord}}, \bar x) \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ un ϕ-module étale $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ sur le schéma formel T-adique $\mathfrak{X}_{\mathrm{ord},\{\infty\}} := \bar X_{\mathrm{ord}} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p} \mathrm{Spf}\,\mathbb{F}_p[[T]]$. Notons $\mathscr{X}_{\{\infty\}}$ l'espace rigide sur $\mathbb{F}_p((T))$ associé au schéma formel $\bar X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p} \mathrm{Spf}\,\mathbb{F}_p[[T]]$ et $\mathscr{X}_{\mathrm{ord},\{\infty\}} \subset \mathscr{X}_{\{\infty\}}$ l'ouvert ordinaire. On peut alors se demander si le ϕ-module étale $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ surconverge sur un voisinage de $\mathscr{X}_{\mathrm{ord},\{\infty\}}$ dans $\bar{\mathscr{X}}$.

THÉORÈME 1.1. – *Le ϕ-module $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ est surconvergent.*

Nous définissons alors $M_{\bar\kappa_\chi}^\dagger$ comme l'espace des sections surconvergentes de $\omega^{\bar\kappa_\chi}$. On possède sur cet espace un opérateur compact U_p associé à ϕ. On peut définir sa série caractéristique, et on veut vérifier qu'elle vaut $\overline{\mathscr{P}_\chi}(X)$. Il nous faut à présent relier cet espace aux espaces de formes surconvergentes de caractéristique 0.

Commençons par « compactifier » l'espace des poids. L'idée est d'ajouter à $\mathcal{W}^{\mathrm{rig}}$ les caractères $\bar\kappa_\chi$. Cet espace des poids compactifié possèdera donc des points de caractéristique 0 et p, on sort du cadre classique de la géométrie rigide, et nous utilisons à présent la théorie des espaces adiques de Huber. Définissons donc $\mathcal{W} = \mathrm{Spa}\,(\Lambda, \Lambda)^{\mathrm{an}}$, c'est l'ouvert des points analytiques de $\mathrm{Spa}\,(\Lambda, \Lambda)$. Comme ensemble, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\mathrm{rig}} \bigcup \{\bar\kappa_\chi,\ \chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{C}_p^\times\}$ (dorénavant $\mathcal{W}^{\mathrm{rig}}$ désigne l'espace adique associé à $\mathcal{W}^{\mathrm{rig}}$). Tout voisinage ouvert de $\{\bar\kappa_\chi\}$ dans $\mathcal{W}$ contient une couronne de rayon extérieur 1 dans la composante connexe $\mathcal{W}_\chi^{\mathrm{rig}}$ de $\mathcal{W}^{\mathrm{rig}}$ (resp. dans chaque composante connexe de $\mathcal{W}^{\mathrm{rig}}$ si $p = 2$).

On possède un faisceau stuctural $(\mathscr{O}_{\mathscr{W}}, \mathscr{O}^+_{\mathscr{W}})$ et sur $\mathscr{O}^+_{\mathscr{W}}$ la topologie est (p,T)-adique. Plus précisément, sur tout ouvert quasi-compact de $\mathscr{W}^{\mathrm{rig}}$, la topologie (p,T)-adique coïncide avec la topologie p-adique. Inversement, sur tout ouvert quasi-compact qui évite les centres $T=0$ des disques ouverts $\mathscr{W}^{\mathrm{rig}}_{\chi}$ la topologie (p,T)-adique coïncide avec la topologie T-adique. On assiste donc, à mesure qu'on se rapproche du bord de $\mathscr{W}$, à un glissement de la topologie p-adique vers la topologie T-adique.

Considérons la courbe modulaire relative $\mathscr{M}_{[0,\infty]} = X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p} \mathscr{W} \to \mathscr{W}$ et son ouvert ordinaire $\mathscr{M}_{\mathrm{ord},[0,\infty]}$. La construction de Katz appliquée au caractère universel $\mathbb{Z}_p^\times \to \Lambda^\times$ et à ρ nous fournit une famille universelle $\omega^{\kappa}_{[0,\infty]}$ de ϕ-modules sur $\mathscr{M}_{\mathrm{ord},[0,\infty]}$. Un système fondamental de voisinages de $\mathscr{M}_{\mathrm{ord},[0,\infty]}$ dans $\mathscr{M}_{[0,\infty]}$ est donné par les ouverts $\mathscr{M}_{r,[0,\infty]}$ d'équation :

$$|\tilde{\mathrm{H}}\mathrm{a}^{p^{r+1}}| \geq \sup\{|T|, |p|\}$$

où $\tilde{\mathrm{H}}\mathrm{a}$ désigne un relèvement arbitraire local de l'invariant de Hasse. Si on regarde ces voisinages pour la topologie p-adique sur l'ouvert $\mathscr{W}^{\mathrm{rig}}$, alors ils se rétrécissent vers le lieu ordinaire à l'infini. Dans [3] et [25], nous avons montré la surconvergence de $\omega^{\kappa}_{[0,\infty]}$ au-dessus de $\mathscr{W}^{\mathrm{rig}}$ et dans le théorème 1.1 nous avons montré la surconvergence à l'infini. Le théorème suivant unifie ces deux résultats :

Théorème 1.2. – *La famille universelle de ϕ-modules $\omega^{\kappa}_{[0,\infty]}$ sur $\mathscr{M}_{\mathrm{ord},[0,\infty]}$ surconverge sur $\mathscr{M}_{r,[0,\infty]}$ pour $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p=2$).*

La série caractéristique associée à cette famille de ϕ-modules est à coefficients dans $\Lambda = \mathrm{H}^0(\mathscr{W}, \mathscr{O}_{\mathscr{W}})$. Par fonctorialité, on vérifie que c'est bien la série caractéristique de Coleman. Nous sommes donc en mesure d'établir la conjecture 1 :

Corollaire 1.1. – *La série caractéristique de U_p sur $M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ vaut $\overline{\mathscr{P}_\chi}$.*

Soit $\mathscr{Z} = V(\mathscr{P}) \subset \mathscr{W} \times \mathbb{A}^1$ la variété spectrale adique. Sa fibre au-dessus de $\mathscr{W}^{\mathrm{rig}}$ est $\mathscr{Z}^{\mathrm{rig}}$. Sa fibre à l'infini est l'ensemble des points $(\bar{\kappa}_\chi, \alpha^{-1})$ où α est une valeur propre non nulle de U_p agissant sur $M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$. On possède sur $\mathscr{Z}$ un faisceau cohérent universel $M^\dagger$ d'espaces caractéristiques de formes surconvergentes et une courbe de Hecke adique $\mathscr{E} \to \mathscr{Z}$ où $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est le sous-faisceau de $\mathrm{End}_{\mathscr{Z}}(M^\dagger)$ engendré par les opérateurs de Hecke. Le théorème suivant généralise les résultats du chapitre 7 de [12]. Il montre l'existence de familles de pente finie pour la topologie T-adique au voisinage de l'infini.

Théorème 1.3. – *Le morphisme $\mathscr{Z} \to \mathscr{W}$ est localement fini et plat sur $\mathscr{Z}$. Le morphisme $\mathscr{E} \to \mathscr{W}$ est localement fini et sans torsion.*

Corollaire 1.2. – *Soit $f \in M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ une forme propre surconvergente de pente finie. Soit $x_f \in \mathscr{E}$ le point associé. Il existe un voisinage $\mathscr{W}_{\bar{\kappa}_\chi}$ de $\bar{\kappa}_\chi$ dans $\mathscr{W}$ et un voisinage $\mathscr{E}_{x_f}$ de x_f dans $\mathscr{E}$ tel que le morphisme associé $\mathscr{E}_{x_f} \to \mathscr{W}_{\bar{\kappa}_\chi}$ soit fini et sans torsion.*

De plus, pour tout entier $k \geq 2$, on peut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de formes propres classiques de pente finie et de poids k, de point associé x_{f_n} sur $\mathscr{E}_{x_f}$, tel que $x_{f_n} \to x_f$ quand $n \to \infty$.