BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES GASQUI
HUBERT GOLDSCHMIDT

Critère d'exactitude pour les formes de degré 1 sur les quadriques complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 1 (1989), p. 103-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_103_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 103–119.

CRITÈRE D'EXACTITUDE POUR LES FORMES DE DEGRÉ 1 SUR LES QUADRIQUES COMPLEXES

PAR

JACQUES GASQUI et HUBERT GOLDSCHMIDT (*)

RÉSUMÉ. — Soit (X, g) une variété riemannienne compacte. Une forme différentielle de degré 1 sur X est à énergie nulle si son intégrale le long de toute géodésique fermée de X est nulle. Dans le cas où (X, g) est une grassmanienne complexe ou réelle, simplement connexe et non isométrique à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, nous montrons que les seules formes de degré 1, à énergie nulle, sont exactes.

ABSTRACT. — We say that a 1-form α on a compact Riemannian manifold (X, g) satisfies the zero-energy condition if the integrals of α over the closed geodesics of X vanish. If (X, g) is a real or complex simply-connected Grassmannian, which is not isometric to $\mathbb{CP}^1$ or $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, we prove that a 1-form on X satisfying the zero-energy condition is exact.

Une forme différentielle de degré 1 sur un espace riemannien est à *énergie nulle* si son intégrale le long de toute géodésique fermée est nulle. D'après les résultats de MICHEL [6], [7] et de [3] (voir aussi [4]), les formes à énergie nulle sur un tore plat ou sur un espace projectif non–isométrique à une sphère, sont toujours exactes.

Nous nous proposons de montrer (THÉORÈME 2) que ce phénomène persiste pour la quadrique complexe Q_n de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, avec $n \geq 3$, d'équation homogène

$$\zeta_0^2 + \cdots + \zeta_{n+1}^2 = 0,$$

où $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}$ sont les coordonnées canoniques de $\mathbb{C}^{n+2}$. Lorsque $n \geq 4$, une description précise des tores plats et des plans projectifs complexes

---

(*) Texte reçu le 1[er] octobre 1987.
J. GASQUI, Université de Grenoble I, Institut Fourier, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-D'Hères Cedex, France.
H. GOLDSCHMIDT, Columbia Univ., Dept. of Math., New York, NY 10027, U.S.A.
The second author was supported in part by National Science Foundation Grant DMS 87–04209.

totalement géodésiques de Q_n, a permis à DIENG [1], via les résultats mentionnés plus haut, d'en déduire immédiatement le THÉORÈME 2. Le but essentiel de ce papier est de traiter le cas $n = 3$.

La quadrique Q_n s'identifie à la grassmannienne des 2-plans orientés de $\mathbb{R}^{n+2}$. Les droites complexes de $\mathbb{C}^{m+1}$, avec $m = [\frac{1}{2}n]$, donnent des espaces projectifs $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ totalement géodésiques de dimension maximale dans Q_n. Lorsque $n = 3$, ceux-ci sont donc des droites projectives, ce qui fait que les seules sous-variétés totalement géodésiques, pour lesquelles les formes de degré 1, à énergie nulle, sont exactes, sont des tores plats. Ce phénomène rend beaucoup plus difficile l'étude de Q_3. En particulier, contrairement au cas $n \geq 4$, nous devons montrer que la cohomologie d'un certain complexe est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de Killing sur Q_3 (THÉORÈME 1). Ce dernier résultat nécessite l'intervention de la théorie des représentations du groupe orthogonal et de l'analyse harmonique sur la quadrique en tant qu'espace homogène. Nous utilisons, notamment, la description explicite des sous-espaces propres du laplacien sur Q_3 de STRICHARTZ [9].

A partir du résultat obtenu pour les quadriques, il est facile de prouver que les formes différentielles de degré 1, à énergie nulle, sont exactes sur les grassmaniennes simplement connexes, réelles ou complexes, et différentes d'une sphère où d'un produit de sphères.

1. Champs de Killing et tores plats

Soit (X, g) une variété riemannienne. Si E est un fibré vectoriel sur X, on désigne par $S^k E$ et $\wedge^\ell E$ la puissance symétrique k-ième de E et la puissance extérieure ℓ-ième de E; on note $C^\infty(E)$ l'espace des sections globales de E sur X. On note $C^\infty(X)$ l'espace des fonctions sur X, à valeurs réelles. On désigne par T et T^* les fibrés tangent et cotangent de X, et on note ∇ la connexion de Levi-Civita de g. Si ξ est un champ de vecteurs sur X, on note $\xi^\flat$ la forme différentielle de degré 1 définie par

$$\xi^\flat(\eta) = g(\xi, \eta),$$

pour $\eta \in T$; il est bien connu que ξ est un champ de Killing de (X, g) si et seulement si $\nabla \xi^\flat$ est une forme antisymétrique. Notons $\mathcal{K}$ l'algèbre de Lie des champs de Killing de (X, g).

Au paragraphe 5, nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient Y une sous-variété totalement géodésique de X, isométrique à un tore plat, et $i : Y \to X$ l'inclusion naturelle. Soit ξ un élément de $\mathcal{K}$.*

(i) *On a*

$$i^* d\xi^\flat = 0.$$

(ii) *Si $\xi^\flat$ est à énergie nulle, alors*

$$i^*\xi^\flat = 0\ .$$

Démonstration. — La projection orthogonale η de $\xi|_Y$ sur le fibré tangent de Y est un champ de Killing de (Y, i^*g) tel que $\eta^\flat = i^*\xi^\flat$. Si ∇^Y désigne la connexion de Levi-Civita de i^*g, on a

$$di^*\xi^\flat = 2\nabla^Y i^*\xi^\flat = 2\nabla^Y \eta^\flat$$

et $d^*\eta^\flat = 0$. Or, tout champ de Killing sur un tore plat est parallèle et ainsi $\nabla^Y\eta^\flat = 0$, d'où (i). Si $\xi^\flat$ est à énergie nulle, il en est de même pour la forme $\eta^\flat$ sur Y ; d'après un résultat de MICHEL [6], $\eta^\flat$ est donc exacte. Comme $\eta^\flat$ est harmonique, la forme $i^*\xi^\flat$ est nulle.

2. La quadrique complexe

Supposons désormais que X soit la quadrique complexe Q_n de l'espace projectif complexe $Y = \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, avec $n \geq 3$, d'équation homogène

$$\zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_{n+1}^2 = 0,$$

où $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}$ sont les coordonnées complexes canoniques de $\mathbb{C}^{n+2}$. On suppose que la métrique g de X est celle induite par la métrique de Fubini-Study $\tilde{g}$ de Y, à courbure holomorphe constante 4. L'espace X est connexe et simplement connexe. On note J la structure complexe de X ou de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$; la forme de Kähler ω de X est donnée par

$$\omega(\xi, \eta) = g(J\xi, \eta),$$

pour $\xi, \eta \in T$. On note $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $\tilde{g}$.

La seconde forme fondamentale B de l'hypersurface complexe X de Y est une 2-forme symétrique sur X, à valeurs dans le fibré normal de X. Si ν est un champ normal unitaire défini sur un voisinage U d'un point $x \in X$, on considère la section h_ν de S^2T^* sur U, définie par

$$h_\nu(\xi, \eta) = \tilde{g}\big(B(\xi, \eta), \nu\big),$$

pour tous $\xi, \eta \in T|_U$. On identifie, via la métrique g, la forme h_ν à un endomorphisme symétrique K_ν de $T|_U$. Si μ est un autre champ normal unitaire sur U, on a

$$\mu = \cos\theta\, \nu + \sin\theta\, J\nu,$$

où θ est une fonction sur U. On vérifie alors que

$$K_\mu = \cos\theta\, K_\nu + \sin\theta\, JK_\nu. \tag{2.1}$$

En particulier, on a

$$K_{J\nu} = JK_\nu.$$

Avec le caractère kählérien des variétés considérées, on aura aussi

$$JK_\nu = -K_\nu J. \tag{2.2}$$

En utilisant l'équation de Gauss, on voit que la courbure $\widetilde{R}$ de (X, g) est donnée sur U par

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(\xi,\eta)\zeta = {} & g(\eta,\zeta)\xi - g(\xi,\zeta)\eta + g(J\eta,\zeta)J\xi \\ & - g(J\xi,\zeta)J\eta - 2g(J\xi,\eta)J\zeta \\ & + g(K_\nu\eta,\zeta)K_\nu\xi - g(K_\nu\xi,\zeta)K_\nu\eta \\ & + g(JK_\nu\eta,\zeta)JK_\nu\xi - g(JK_\nu\xi,\zeta)JK_\nu\eta,\end{aligned} \tag{2.3}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T|_U$. La formule (2.3) et le fait que g soit une métrique d'Einstein nous donnent

$$K_\nu^2 = \mathrm{id}$$

(*cf.* [8]). Dans la suite, l'involution K_ν s'appellera *structure réelle* de la quadrique, associée à la normale unitaire ν.

Notons $T^+ = T_\nu^+$ et $T^- = T_\nu^-$ les sous-fibrés de $T|_U$ formés respectivement des vecteurs propres de K_ν correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1. Puisque K_ν et J anticommutent, J induit un isomorphisme de T_ν^+ sur T_ν^- ; de plus, la décomposition

$$T|_U = T_\nu^+ \oplus T_\nu^- \tag{2.4}$$

est orthogonale.

Signalons encore un résultat de [8] qui s'obtient en combinant la décomposition (2.4) et l'équation de Codazzi. Considérons la forme différentielle φ_ν de degré 1 sur U définie par

$$\varphi_\nu(\xi) = \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi \nu, J\nu), \tag{2.5}$$

pour $\xi \in T|_U$. Alors on a

$$\nabla K_\nu = \varphi_\nu \otimes JK_\nu. \tag{2.6}$$