BULLETIN DE LA S. M. F.

ALBERTO ARABIA

Cohomologie T-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kač-Moody

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 2 (1989), p. 129-165
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_2_129_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 129–165.

COHOMOLOGIE T-ÉQUIVARIANTE DE LA VARIÉTÉ DE DRAPEAUX D'UN GROUPE DE KAČ–MOODY

PAR

ALBERTO ARABIA (*)

RÉSUMÉ. — On définit des opérateurs $\mathcal{A}_i$ de Bernstein-Gel'fand-Gel'fand sur la cohomologie T-équivariante entière $H_T^*(\mathcal{F})$ de la variété de drapeaux $\mathcal{F} = G/B$ d'un groupe de Kač-Moody G. En intégrant sur les variétés de Schubert de $\mathcal{F}$, on caractérise une famille $\{\mathcal{L}_w\}_{w\in W}$ de formes $H_T^*(\,\cdot\,)$-linéaires sur $H_T^*(\mathcal{F})$, base du dual de $H_T^*(\mathcal{F})$. Ces formes canoniques sont liées aux opérateurs $\mathcal{A}_i$ par l'égalité $\mathcal{L}_{wr_i} = \mathcal{L}_w\mathcal{A}_i$ lorsque $wr_i > w$, ce qui entraîne le caractère intrinsèque des composées $\mathcal{A}_w$ des opérateurs en question. On prouve que les $\mathcal{A}_w$ peuvent être obtenus par intégration sur les fibres de certaines fibrations *au-dessus* de $\mathcal{F}$.

Par restriction au sous-espace W des points fixes de T dans $\mathcal{F}$, on donne un homomorphisme injectif Θ de $H_T^*(\mathcal{F})$ dans l'algèbre $F(W;Q)$ de toutes les applications définies sur W à valeurs dans le corps Q des fractions rationnelles de l'algèbre de polynômes $S = \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$, où $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ dénote le système des racines simples de l'algèbre de Lie de G. Des formules explicites pour les localisations des formes $\mathcal{L}_w$ sur $F(W;Q)$ sont données. On détermine de même les localisations A_i des $\mathcal{A}_i$ sur $F(W;Q)$ nous permettant de caractériser algébriquement l'image de Θ comme la plus grande partie de $F(W;S)$ constituée des applications de degrés bornés et stable sous l'action des opérateurs A_i, celle-ci s'identifie alors facilement à l'algèbre Λ de B. KOSTANT et S. KUMAR, expliquant les principaux résultats de [12] et [13].

ABSTRACT. — Bernstein-Gel'fand-Gel'fand operators $\mathcal{A}_i$ are defined over the integral T-equivariant cohomology $H_T^*(\mathcal{F})$ of the flag variety $\mathcal{F} = G/B$ of a Kač-Moody group G. By integration over the Schubert varieties of $\mathcal{F}$, we caracterise a family $\{\mathcal{L}_w\}_{w\in W}$ of $H_T^*(\,\cdot\,)$-linear forms ovei $H_T^*(\mathcal{F})$, base of the dual of $H_T^*(\mathcal{F})$. These canonical forms are related to the operators $\mathcal{A}_i$ by the equality $\mathcal{L}_{wr_i} = \mathcal{L}_w\mathcal{A}_i$ whenever $wr_i > w$, impliying the intrinsic character of the compositions $\mathcal{A}_w$ of the $\mathcal{A}_i$'s. We show that each $\mathcal{A}_w$ can be obtained by integration over fibers of certains fibrations *above* $\mathcal{F}$.

By restriction to the sub-space W of T-fixed points of $\mathcal{F}$, we give an injectif homomorphism Θ from $H_T^*(\mathcal{F})$ into the algebra F(W; Q) of all maps defined on W with values in the fraction field Q of the polynomial algebra $S = \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$, where $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ denotes the simple root system of the Lie algebra of G. Explicit formulas for the localisations of the $\mathcal{L}_w$'s over $F(W;Q)$ are given. We determine also the

(*) Texte reçu le 29 septembre 1987, révisé le 27 mai 1988.

A. ARABIA, Université Paris VII, UER de Mathématiques, Tour 45–55, 5e étage, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

localisations A_i's of the $\mathcal{A}_i$'s over $F(W;Q)$, which allows us to caracterise algebraically the image of Θ as the greatest subset of $F(W;S)$ of maps of bounded degrees stable under the action of the A_i's, we then easily identify this image to the KOSTANT–KUMAR algebra Λ, explaining the principal results of [12] and [13].

1. Introduction

1.1. — Considérons une algèbre de Kač-Moody $\mathfrak{g}$ sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, notons $\mathfrak{h}$ sa sous-algèbre de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ son système de racines simples et W le groupe de Weyl correspondant muni de l'ordre de Bruhat. Soit G le groupe, de sous-groupe de Borel B et de tore maximal H, associé à $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et notons K la forme compacte de G. Posons $T = K \cap H$, c'est un tore réel de dimension n et d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, notons r_i et P^i respectivement la réflexion et le sous-groupe parabolique minimal de G, associés à la racine simple de même indice. Soient enfin $S = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ l'algèbre de polynômes à coefficients entiers sur $\mathfrak{t}$ et Q le corps de fractions de S, considérés munis de leur structure naturelle de W-algèbre.

1.2. — Dans cet article je m'intéresse à la cohomologie T-équivariante à coefficients entiers de la variété de drapeaux $\mathcal{F} = G/B = K/T$. L'outil fondamental est l'opération d'intégration sur les fibres pour une fibration T-équivariante $\pi : M \to N$ dont la fibre F est munie d'une structure de CW-complexe vérifiant une certaine condition d'orientabilité (*cf.* 2.1). Cette opération induit un homomorphisme de $H^*_T(N)$-modules noté $\tilde{\pi}_*$, défini sur $H^*_T(M)$ et à valeurs dans $H_T^{*-\dim(F)}(N)$. Je l'utilise pour définir les opérateurs $\mathcal{A}_i$ de Bernstein-Gel'fand-Gel'fand (BGG) sur $H^*_T(\mathcal{F})$ en généralisant, au contexte équivariant présent, le point de vue considéré dans [11] par V. KAČ et D. PETERSON. Ceci consiste, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, à intégrer sur la fibre P^i/B de la fibration T-équivariante $\pi_i : \mathcal{F} \to G/P^i := \mathcal{F}^i$, obtenant l'homomorphisme $\tilde{\pi}_{i*} : H^*_T(\mathcal{F}) \to H_T^{*-2}(\mathcal{F}^i)$, et à considérer ensuite l'image réciproque en cohomologie équivariante $\tilde{\pi}_i^*$ induite par π_i (*cf.* 2.1), c'est-à-dire on pose $\mathcal{A}_i = \tilde{\pi}_i^* \circ \tilde{\pi}_{i*}$. Le même procédé d'intégration sur les fibres est utilisé pour définir une famille de formes $H^*_T(\,\cdot\,)$-linéaires sur $H^*_T(\mathcal{F})$ que je note $\{\mathcal{L}_w\}_{w \in W}$, provenant des fibrations T-équivariantes triviales $\overline{\mathcal{F}}_w \to \{\,\cdot\,\}$, où $\overline{\mathcal{F}}_w$ dénote la variété de Schubert de $\mathcal{F}$ associée à l'élément w de W. Dans 2.5, je prouve que cette famille réalise une base du dual de $H^*_T(\mathcal{F})$ en tant que $H^*_T(\,\cdot\,)$-module gradué et outre le fait qu'elle détermine une base canonique de $H^*_T(\mathcal{F})$, son intérêt principal réside dans la relation qui lie les $\mathcal{L}_w$ aux opérateurs $\mathcal{A}_i$. A ce sujet, je prouve dans la section 3 l'affirmation suivante :

PROPOSITION 3.2.1. — *Soient w un élément de W et r_i une réflexion simple, vérifiant la relation $wr_i > w$. On a $\mathcal{L}_{wr_i} = \mathcal{L}_w \circ \mathcal{A}_i$.*

La technique de localisation permet alors d'apporter des renseignements très précis sur les propriétés algébriques de ces objets. Dans le paragraphe 2.6 j'étudie le morphisme de restriction Θ de la cohomologie T-équivariante de $\mathcal{F}$ à celle du sous-espace des points fixes de T dans $\mathcal{F}$. Ce sous-espace s'identifie canoniquement au groupe de Weyl W obtenant ainsi un homomorphisme d'algèbres $\Theta : H_T^*(\mathcal{F}) \to H_T^*(W) \equiv F_b(W;S)$, où $F_b(W;S)$ dénote l'algèbre des applications définies sur W à valeurs dans S, de degrés bornés. Cet homomorphisme est injectif (*cf.* PROPOSITION 2.6.1) et permet de projeter sur l'algèbre $F(W;Q)$ de toutes les applications de W dans Q, les opérateurs $\mathcal{A}_i$ et les applications $\mathcal{L}_w$ (procédé de localisation). Je décris la localisation des $\mathcal{A}_i$ dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3.1. — *Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, notons A_i l'endomorphisme de $F(W;Q)$ défini par*

$$A_i(f)(w) = \frac{f(wr_i) - f(w)}{w(\alpha_i)},$$

pour tous $f \in F(W;Q)$ et $w \in W$. On a $\Theta \circ \mathcal{A}_i = A_i \circ \Theta$.

Je retrouve ainsi les opérateurs A_i de KOSTANT–KUMAR, considérés pour la première fois dans leur note [12]. Cette proposition montre qu'il s'agit bien d'opérateurs de BGG dans un contexte équivariant.

Les localisations L_w des $\mathcal{L}_w$ permettent de prouver très simplement le caractère intrinsèque des composées $A_{i_1} \circ \cdots \circ A_{i_\ell}$. Considérons à cet effet l'action du groupe de Weyl sur $F(W;Q)$ définie par $(w \cdot f)(u) = w(f(w^{-1}u))$ pour tous w, $u \in W$ et $f \in F(W;Q)$. On a alors :

PROPOSITION 3.4.1. — *Soient $r_{i_1}, \ldots, r_{i_\ell}$ des réflexions simples et posons $w = r_{i_1} \cdots r_{i_\ell}$. L'opérateur $A_{i_1} \circ \cdots \circ A_{i_\ell}$ est un endomorphisme de W-module de $F(W;Q)$ satisfaisant à l'une des conditions suivantes :*

(1) *si $\lg(w) = \ell$, l'application L_w détermine entièrement l'opérateur $A_{i_1} \circ \cdots \circ A_{i_\ell}$ par l'égalité*

$$(A_{i_1} \circ \cdots \circ A_{i_\ell})(f)(v) = v\big(L_w(v^{-1} \cdot f)\big),$$

pour tous $f \in F(W;Q)$ et $v \in W$;

(2) *si $\lg(w) < \ell$, on a $A_{i_1} \circ \cdots \circ A_{i_\ell} = 0$.*

Notons $A_w = A_{i_1} \circ \cdots \circ A_{i_\ell}$ l'opérateur obtenu à partir d'une décomposition réduite $(r_{i_1}, \ldots, r_{i_\ell})$ de w. La famille d'opérateurs $\{A_w\}_{w \in W}$ permet de décrire algébriquement l'image de la restriction Θ par le

THÉORÈME 3.5.1. — *L'homomorphisme de restriction $\Theta : H_T^*(\mathcal{F}) \to F_b(W;S)$ établit un isomorphisme entre $H_T^*(\mathcal{F})$ et l'ensemble des applications f de $F_b(W;S)$ satisfaisant à l'une quelconque des deux conditions suivantes :*

(1) $A_w(f)(e) \in S$, pour tout w dans W, où e dénote l'élément neutre de W ;

(2) $A_w(f) \in F_b(W;S)$, pour tout w dans W.

En particulier l'image de Θ est la plus grande partie de $F_b(W;S)$ stable sous l'action des A_i.

Or c'est justement par la condition (1) que B. KOSTANT et S. KUMAR définissent leur algèbre Λ (*cf.* [12], [13]) en tant que sous-algèbre de $F_b(W;S)$; celle-ci s'identifie donc à la cohomologie T-équivariante de $\mathcal{F}$. Les principaux résultats de [13], rassemblés ici dans le THÉORÈME 4.2.1 découlent alors facilement.

1.3. — Dans ce travail on trouvera aussi une interprétation cohomologique des compositions des opérateurs $\mathcal{A}_i$ qui suit de près des idées de M. DEMAZURE.

Faisons agir tout élément g de G sur le produit $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par $g(x,y) = (gx, gy)$ et notons pour chaque $w \in W$, $\mathcal{T}_w$ la saturation du produit des variétés de Schubert $\overline{\mathcal{F}}_e \times \overline{\mathcal{F}}_w$ dans $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par cette action de G. Soient p_1 et p_2 les projections de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$ définies par $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$, la restriction de p_1 à $\mathcal{T}_w$ définit une fibration G-équivariante de fibre $\overline{\mathcal{F}}_w$ et de base $\mathcal{F}$. En restreignant p_2 à $\mathcal{T}_w$, on a le diagramme de morphismes G-équivariants

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_w \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathcal{F} \arrow[dl, dashed, "\mathcal{D}_w"] \\ \mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

où la flèche en pointillé dénote, et dénotera tout au long de cet article, un homomorphisme entre les cohomologies équivariantes des espaces concernés ; dans le cas présent $\mathcal{D}_w$ est l'endomorphisme de $H_T^*(\mathcal{F})$ défini par $\mathcal{D}_w = \tilde{p}_{1*} \circ \tilde{p}_2^*$. On a :

PROPOSITION 3.7.1. — *Soit w un élément de W et $(r_{i_1}, \ldots, r_{i_\ell})$ une décomposition réduite de w, alors $\mathcal{D}_w = \mathcal{A}_{i_1} \circ \cdots \circ \mathcal{A}_{i_\ell}$.*