BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-YVES ETESSE

Dualité plate pour les surfaces à coefficients dans un groupe de type multiplicatif

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 1 (1989), p. 19-58
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_19_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 19–58.

DUALITÉ PLATE POUR LES SURFACES À COEFFICIENTS DANS UN GROUPE DE TYPE MULTIPLICATIF

PAR

JEAN-YVES ETESSE (*)

RÉSUMÉ. — Dans le cas d'une surface propre et lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$ nous généralisons le théorème de dualité plate pour les racines p^n-ièmes de l'unité, dû à J. S. MILNE, en prenant cette fois pour coefficients un groupe de type multiplicatif quelconque. L'outil essentiel pour cette dualité est le complexe de De Rham–Witt à coefficients dans le cristal de Dieudonné du groupe de type multiplicatif considéré.

ABSTRACT. — In the case of a proper smooth surface over a perfect field of characteristic $p > 0$ we generalize the flat duality theorem for p^n-th roots of unity, due to J. S. MILNE, by taking as coefficients any multiplicative type group. To establish that duality, the essential tool is the De Rham–Witt complex with coefficients in the Dieudonné crystal of the multiplicative type group considered.

Table des Matières

(*) Texte reçu le 1er juillet 1987.

J.-Y. ETESSE, IRMAR, Unité associée au CNRS n° 305, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

Introduction

0.1. — Soit X un schéma propre et lisse sur $S = \operatorname{Spec} k$, où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Si l'on veut établir un théorème de dualité pour la cohomologie plate de X, la catégorie naturelle des coefficients est la catégorie des schémas en groupes commutatifs, finis localement libres sur X ; la partie de p-torsion présentant, seule, des phénomènes spécifiques à la cohomologie plate, on ne considère que des p-groupes.

La motivation initiale de ce travail réside, lorsque X est une surface, dans l'extension du théorème de dualité, établi par MILNE ([24, 5.2]), pour la cohomologie plate de X à valeurs dans le faisceau μ_{p^n} des racines p^n-ièmes de l'unité : nous établissons ici une dualité avec pour coefficients un p-groupe fini localement libre G de type multiplicatif sur X.

Plus précisément, désignons par S_{parf} le topos parfait de S, par X_{fppf} le topos fppf de X, par π le morphisme de topos $X_{\text{fppf}} \to S_{\text{parf}}$ et par $\mathcal{F}$ la catégorie des faisceaux abéliens de S_{parf} ; le foncteur

$$L \longrightarrow L^{\vee} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{F}}(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

est une auto-dualité de la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $D(\mathcal{F})$ formée de complexes bornés dont la cohomologie est constituée de groupes quasi-algébriques, au sens de SERRE [27]. Le théorème de Milne [24, 5.2] exprime l'existence d'un système compatible d'isomorphismes

$$\mathbb{R}\pi_*(\mu_{p^n}) \simeq \big(\mathbb{R}\pi_*(\mu_{p^n})\big)^{\vee}[-4].$$

Alors que les groupes μ_{p^n} doivent être considérés comme auto-duaux, la dualité pour le groupe G est fournie par le foncteur

$$G \longrightarrow G^t = G^{*\vee *},$$

où * est la dualité de Cartier et $^{\vee}$ la dualité de Pontryagin des groupes étales. Avec ces définitions nous établissons :

THÉORÈME. — *Il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathbb{R}\pi_*(G^t) \simeq \big(\mathbb{R}\pi_*(G)\big)^{\check{}}[-4].$$

Plus généralement, si X est de dimension m sur k et si H est un groupe p-divisible de type multiplicatif sur X, le théorème de dualité ci-dessus est conséquence d'un théorème de dualité liant les faisceaux étales $\nu_n(\mathbb{D}(H^*), i)$ et $\nu_n(\mathbb{D}(H^{t*}), m-i)$ associés aux cristaux de Dieudonné $\mathbb{D}(H^*)$ et $\mathbb{D}(H^{t*})$ (*cf.* [3], [4]) : ces faisceaux sont définis à partir des points fixes d'un opérateur de Frobenius et d'un opérateur de Cartier sur les complexes de De Rham–Witt à coefficients dans $\mathbb{D}(H^*)$ et $\mathbb{D}(H^{t*})$ (*cf.* [12] et [15]). Ce dernier théorème permettra en outre, dans un prochain travail [15 bis], des évaluations p-adiques sur la fonction L associée au cristal de Dieudonné d'un groupe p-divisible étale sur X.

Je tiens à remercier ici l'I.H.E.S. pour l'hospitalité qu'il m'a offerte durant le printemps 1983 : une grande partie de ce travail y a été réalisée dans son ambiance stimulante.

Mes remerciements vont naturellement à Pierre BERTHELOT qui m'a, entre autres, permis d'éviter maints écueils.

1. Définition de l'accouplement de dualité

0. — Soient X un schéma propre et lisse de dimension m sur $S = \operatorname{Spec} k$ (k corps parfait de caractéristique $p > 0$) et G (resp. H) un p-groupe fini localement libre (resp. un groupe p-divisible de hauteur h) de type multiplicatif sur X. Définissons le dual de G par $G^t = G^{*\check{}*}$, où * est la dualité de Cartier et $\check{}$ la dualité de Pontryagin des groupes étales. Le p-groupe G^t est lui aussi localement libre de type multiplicatif, de même que le groupe p^nG et le noyau, $G(n)$, de la multiplication par p^n sur G; en particulier pour $G = H(n)$, la famille des $H^t(n) := (H(n))^t$ est aussi un groupe p-divisible de type multiplicatif et de hauteur h sur X.

Si $W_n\Omega^\bullet$ est le complexe de DE RHAM-WITT de X [21], on considérera les faisceaux étales suivants sur X [15, I et III 2]

$$\begin{aligned}\nu_n(i) &= \operatorname{Ker}\Big\{1 - F : W_n\Omega^i \longrightarrow W_n\Omega^i/dV^{n-1}\Omega^{i-1}\Big\}\\ &= \operatorname{Ker}\Big\{C - 1 : F(W_{n+1}\Omega^i) \longrightarrow W_n\Omega^i\Big\},\\ \tilde{\nu}_n(i) &= \operatorname{Ker}\Big\{1 - F : W_n\Omega^i \longrightarrow W_n\Omega^i/dW_n\Omega^{i-1}\Big\}.\end{aligned}$$

Il est clair que $\nu_n(i) \subset \tilde{\nu}_n(i)$.

1. Énoncé et méthode de la démonstration. — Soient X_{fppf} le (gros) topos fppf de X, $X_{\text{ét}}$ le (petit) topos étale de X et $\alpha : X_{\mathrm{fppf}} \to X_{\text{ét}}$ le morphisme canonique.

Le but du I est d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1. — *Si X est de dimension 2 sur S, il existe un accouplement canonique, fonctoriel en G,*

$$R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) \longrightarrow \nu_n(2), \tag{1.1.1}$$

indépendant de l'entier n choisi tel que $p^nG = 0$, i.e. tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \nu_n(2) \arrow[d, "\underline{p}"] \\ R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) \arrow[r] & \nu_{n+1}(2). \end{tikzcd} \tag{1.1.2}$$

En particulier, dans le cas d'un groupe p-divisible H, cet accouplement fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} R^1\alpha_*\big(H(n)\big) \times R^1\alpha_*\big(H^t(n)\big) \arrow[r] \arrow[d, "i \,\downarrow\quad p\,\uparrow"'] & \nu_n(2) \arrow[d, "\underline{p}"] \\ R^1\alpha_*\big(H(n+1)\big) \times R^1\alpha_*\big(H^t(n+1)\big) \arrow[r] & \nu_{n+1}(2), \end{tikzcd} \tag{1.1.3}$$

où la flèche verticale de gauche est induite par l'inclusion $H(n) \hookrightarrow H(n+1)$ et celle du milieu, par la projection $H^t(n+1) \twoheadrightarrow H^t(n)$.

Rappelons quelques notations [15]. Les F-cristaux $E = \mathbb{D}(H^*)$ et $E = \mathbb{D}(G^*)$ sont munis d'isomorphismes $\Phi : E^\sigma \xrightarrow{\sim} E$; le cas $E = \mathbb{D}(H^*)$ équivaut à un F-cristal unité [26, VI, 3.1.2.1]. Nous posons [15, II, 1.1.7] $E_n = E_{(X, W_n(X), \delta)}$, où δ désigne les puissances divisées canoniques sur $VW_{n-1}\mathcal{O}$, et [15, III, 2.1 et 2.2]

$$\begin{aligned} \nu_n(E,i) &= \operatorname{Ker}\Big\{E_n \otimes W_n\Omega^i \xrightarrow{1-\check{F}} E_n \otimes W_n\Omega^i / \nabla V^{n-1}\big(E_1 \otimes \Omega^{i-1}\big)\Big\} \\ &= \operatorname{Ker}\Big\{F^n\big(E_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^i\big) \xrightarrow{\widetilde{C}-1} E_n \otimes W_n\Omega^i\Big\}. \end{aligned}$$