BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI GAUDIER

Algèbres de groupe du groupe additif

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 2 (1989), p. 233-245
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_2_233_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 233–245.

ALGÈBRES DE GROUPE DU GROUPE ADDITIF

PAR

HENRI GAUDIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit k un corps parfait de caractéristique positive, soient α le groupe additif et W l'anneau des vecteurs de Witt. Nous calculons l'algèbre de groupe et la W-algèbre de groupe de α au sens des k-schémas affines. Le résultat obtenu est ensuite étendu au cas sans caractéristique : nous obtenons alors une algèbre de puissances fractionnaires divisées sur l'anneau des gros vecteurs de Witt.

ABSTRACT. — Let k be a perfect field of positive characteristic, let α be the additive group and let W be the Witt vector ring. We compute the group algebra and the group W-algebra of α in the sense of affine schemes. The calculation is next extended to the caracteristic-free case. We so obtain a $\mathbf{W}$-algebra with fractional divided powers, where $\mathbf{W}$ denote the ring of the big Witt vectors.

Soit $\mathbf{k}$ un corps parfait de caractéristique p non nulle, $\mathbf{W}$ le schéma en anneaux des gros vecteurs de Witt, et W le schéma en anneaux des p-vecteurs de Witt. On sait ([G2]) que le foncteur oubli qui à un $\mathbf{k}$-schéma en anneaux A associe son monoïde multiplicatif $A^{\times}$, admet un adjoint à gauche qui à un $\mathbf{k}$-monoïde X associe son algèbre de monoïde LX. De plus la catégorie des représentations de X dans un groupe unipotent commutatif est équivalente à la catégorie des LX-modules.

Le but de cet article est de déterminer explicitement l'algèbre de groupe $L\alpha$ du groupe additif α. On obtiendra ainsi une équivalence entre représentations de α et $L\alpha$-modules. On détermine également la structure de l'anneau $W\alpha = L\alpha \otimes W$ (où le produit tensoriel est pris au sens des schémas en anneaux [G1]), ce qui donne une équivalence entre représentations W-linéaires de α et $W\alpha$-modules. L'anneau $W\alpha$ obtenu peut être considéré comme l'algèbre des puissances divisées en une variable sur W avec des puissances fractionnaires à dénominateurs les puissances de p.

(*) Texte reçu le 10 décembre 1987 , révisé le 15 mars 1988.
Henri GAUDIER, Université Louis Pasteur, IRMA, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
Adresse actuelle : Département de mathématiques, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Le Mont Houy, 59326 Valenciennes Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1989/233/$ 5.00

Dans la première partie de l'article on définit les coefficients $*$-binômiaux : ce sont des éléments de $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$ qui ont un comportement analogue à celui des coefficients binômiaux et qui interviennent comme constantes de la multiplication dans $L\alpha$ et $W\alpha$. Dans les parties 2 et 3, on détermine les multiplications respectives de $L\alpha$ et $W\alpha$. Dans la quatrième partie on construit, hors caractéristique, un anneau $\mathbf{W}\alpha$ qui étend l'anneau $W\alpha$ et qui peut être considéré comme la $\mathbf{W}$-algèbre des puissances divisées en une variable avec des puissances fractionnaires quelconques.

Notations. — Soit $\mathbf{k}$ l'anneau de base, qu'on commencera par supposer quelconque. On considère le triangle commutatif de $\mathbf{k}$-foncteurs en anneaux ([D.G. p. 639], [H p. 121]) :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{W} \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "w"'] & \Lambda \arrow[d, "\partial"] \\ & \mathcal{O}_{\mathbf{k}}^{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

où $\mathbf{W}$ est l'anneau des gros vecteurs de Witt, Λ est le λ-anneau universel, $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$ est le foncteur identité, e est l'isomorphisme d'anneaux défini par :

$$e(x_1, ..., x_n, ...) = \prod_{i \geq 1} \left(1 - x_i T^i\right)^{-1},$$

où w est donné par :

$$w_n(x_1, ..., x_n, ...) = \sum_{d|n} d\, x_d^{n/d},$$

et où $\partial_n(S)$ est le coefficient de T^{n-1} dans la série $\dfrac{d \log S}{dT}$. On sait que w et ∂ sont des isomorphismes si $\mathbf{k}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, par conséquent $\mathbf{W}(R)$ est isomorphe à $R^{\mathbb{N}}$ pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R.

On notera V_l (resp. F_l) les morphismes de décalage (resp. de Frobenius) de $\mathbf{W}$ ou Λ, et σ le morphisme de Teichmuller $\mathcal{O}_{\mathbf{k}} \to \mathbf{W}$ défini par $\sigma(x) = (x, 0, \ldots, 0, \ldots)$, on sait que $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Enfin si i et j sont des entiers on notera $(\!(i, j)\!)$ le coefficient binômial $\binom{i+j}{i}$.

1. Coefficients $*$-binômiaux et p-binômiaux

1.1. *Définition.* — Soient i et j deux entiers naturels, on appelle *coefficient $*$-binômial* $^*\!(\!(i,j)\!)$ l'unique élément de $\mathbf{W}(\mathbb{Q})$ tel qu'on ait pour tout n : $w_n(^*\!(\!(i,j)\!)) = (\!(ni,nj)\!)$. Si l est un entier non nul on posera également $^*\!(\!(i,j;l)\!) = {}^*\!(\!(i,j)\!)/l$.

Dans la première partie de ce travail nous allons étudier ces coefficients $*$-binômiaux et, en particulier, montrer qu'ils sont à composantes entières.

1.2. Proposition. — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a les identités suivantes :*

(a) *dans* $\mathbf{W}(\mathbb{Q}[X,Y])$

$$\sigma\big((X+Y)^k\big) = \sum_{l\geq 1} \sum_{\substack{i+j=lk \\ (i,j,l)=1}} V_l\big(^*\!(\!(i,j;l)\!)\,\sigma(X^iY^j)\big); \tag{1.2.1}$$

(b) *dans* $\Lambda(\mathbb{Q}[X,Y])$

$$\big(1-(X+Y)^kT\big)^{-1} = \prod_{\substack{r\geq 1 \\ l\geq 1}} \prod_{\substack{i+j=lk \\ (i,j,l)=1}} \big(1 - {}^*\!(\!(i,j;l)\!)_r\, X^{ri}Y^{rj}T^{rl}\big)^{-1}. \tag{1.2.2}$$

où les $^*\!(\!(i,j;l)\!)_r$ sont les composantes de $^*\!(\!(i,j;l)\!)$.

Puisque l'on est en caractéristique 0, il suffit de transformer les deux membres par w. Or si on désigne par D le membre de droite de (1.2.1), on a :

$$\begin{aligned} w_n(D) &= \sum_{l\in\mathbb{N}^*} \sum_{i,j} w_nV_l\big(l^{-1}\,{}^*\!(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\big), \\ &= \sum_{l\mid n} \sum_{i,j} w_{n/l}\big(^*\!(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\big), \end{aligned}$$

puisque w_nV_l est égal à $l\,w_{n/l}$, si l divise n, et est nul sinon,

$$\begin{aligned} &= \sum_{l\mid n} \sum_{i,j} w_{n/l}\big(^*\!(\!(i,j)\!)\big)w_{n/l}\big(\sigma(X^iY^j)\big), \\ &= \sum_{l\mid n} \sum_{i,j} (\!(ni/l,nj/l)\!)\,X^{ni/l}Y^{nj/l}, \\ &= \sum_{ld=n} \sum_{\substack{i+j=lk \\ (i,j,l)=1}} (\!(di,dj)\!)\,X^{di}Y^{dj}, \\ &= \sum_{d\mid n} \sum_{\substack{di+dj=nk \\ (di,dj,n)=d}} (\!(di,dj)\!)\,X^{di}Y^{dj}, \\ &= (X+Y)^{nk} = w_n\big(\sigma(X+Y)^k\big). \end{aligned}$$

Ce qui démontre la relation (1.2.1). La relation (1.2.2) n'en est que la traduction par l'isomorphisme e.

1.3. COROLLAIRE. — *Si l divise $i+j$ et si l, i et j sont premiers entre eux, le coefficient* $^*(\!(i,j;l)\!)$ *appartient à* $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$, *et la relation* (1.2.1) (*resp.* (1.2.2)) *est vraie dans* $\mathbf{W}(\mathbb{Z}[X,Y])$ (*resp.* $\Lambda(\mathbb{Z}[X,Y])$).

Il est facile de voir que pour tout entier n on a une décomposition

$$1-(X+Y)^kT=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j}(1-M_{i,j}T^i)\qquad(\operatorname{mod} T^{n+1}),$$

où les $M_{i,j}$ sont des monômes de degré total ki. Si l'on impose de plus que les monômes aient des degrés en X et Y distincts, alors une telle décomposition est unique dans $\mathbb{Q}$ comme dans $\mathbb{Z}$. Passant à la limite sur n, on constate alors que cette décomposition est donnée par la formule (1.2.2), et que les coefficients de cette dernière sont donc dans $\mathbb{Z}$.

1.4. **Coefficients $*$-multinômiaux.** — Il est clair que la définition (1.1) peut s'étendre aux coefficients multinômiaux : si $i_1,\dots,i_h$ sont des entiers et l un entier non nul, alors le coefficient $*$-multinômial $^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)$ est défini par :

$$w_n\big({}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)\big)=l^{-1}\,(\!(ni_1,\dots,ni_h)\!).$$

Comme pour les coefficients binômiaux on a les formules :

$$\text{(1.4.1)}\quad \sigma(X_1+\cdots+X_h)^k=\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_h=lk\\(i_1,\dots,i_h,l)=1}}V_l\big({}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)\,\sigma(X_1^{i_1}\dots X_h^{i_h})\big),$$

dans $\mathbf{W}(\mathbb{Q}[X_1,\dots,X_h])$, et

$$\text{(1.4.2)}\qquad \big(1-(X_1+\cdots+X_h)^kT\big)^{-1}$$
$$=\prod_{\substack{r\geq1\\ l\geq1}}\ \prod_{\substack{i_1+\cdots+i_h=lk\\(i_1,\dots,i_h,l)=1}}\big(1-{}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)_r\,X_1^{ri_1}\dots X_h^{ri_h}T^{rl}\big)^{-1}.$$

dans $\Lambda(\mathbb{Q}[X_1,\dots,X_h])$.

Et par le même raisonnement on conclut que les coefficients $*$-multinômiaux sont à composantes entières si $(i_1,\dots,i_k,l)=1$ et si l divise $\sum_{\alpha=1}^{h}i_\alpha$.

On appellera enfin $*$-factorielle, et on désignera par $^*h\,!$ le coefficient $*$-multinômial dans lequel $i_1=\ldots=i_h=l=1$.