BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC CHARDIN

Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n^o 3 (1989), p. 305-318

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_3_305_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 305–318.

UNE MAJORATION DE LA FONCTION DE HILBERT ET SES CONSÉQUENCES POUR L'INTERPOLATION ALGÉBRIQUE

PAR

MARC CHARDIN (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons ici une majoration de la fonction de Hilbert d'un idéal homogène géométriquement réduit, en fonction des degrés et dimensions des composantes de la variété algébrique associée ; cette majoration étant valable en tous degrés il nous est alors possible d'obtenir des résultats d'interpolation ainsi que de former une suite régulière de polynômes de l'idéal en contrôlant leurs degrés.

ABSTRACT. — A new upper bound for the Hilbert function of a homogeneous, geometrically reduced, ideal is given, depending only on the dimensions and degrees of the components of the associeted variety ; this bound, valid in all degrees, allows us to give interpolation results and also to construct a regular sequence of polynomials belonging to the ideal with controlled degrees.

Plan

(*) Texte reçu le 18 avril 1988, révisé le 6 juillet 1988.

M. CHARDIN, Université de Paris VI, U.A. au CNRS n° 763 "Problèmes diophantiens", Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre-et-Marie-Curie, 75231 Paris Cedex 05 et Centre de Mathématiques U.A. au CNRS n° 169, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1989/305/$ 5.00

Introduction

Si I est un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$, on définit la fonction de Hilbert de I par

$$H_I(\nu) = \dim_k \bigl(k[X_0, \dots, X_n]/I\bigr)_\nu .$$

On montre classiquement (voir [H], Ch. I, theorem 7.5 par exemple) que $H_I(\nu)$ est une fonction polynomiale de ν pour ν "assez grand", dont les coefficients se calculent simplement à partir des genres des sections linéaires générales de la variété définie par I. On a en particulier $H_I(\nu) = (\nu^D/D!) \deg I + \cdots$ pour ν "assez grand" où les points désignent des termes de degré inférieur en ν et où D et $\deg I$ désignent respectivement la dimension et le degré de l'idéal I.

Nous donnons ici une majoration de H_I dans le cas où l'idéal I est équidimensionnel et géométriquement réduit (*i.e.* les idéaux premiers associés à I sont de même dimension et $k[X_0, \dots, X_n]/I$ est une k-algèbre séparable), en abrégé E.G.R. . Un exemple important est celui d'un idéal premier avec k parfait ([BA], Ch.V, § 15, n° 4, théorème 2).

Ce résultat découle d'une simplification de la méthode employée par YU. V. NESTERENKO dans [Ne]; il améliore assez sensiblement — et généralise — le résultat obtenu par celui-ci dans cette direction.

Énonçons le résultat central :

THÉORÈME. — *Soient k un corps et $R = k[X_0, \dots, X_n]$.*
Soient I un idéal homogène E.G.R. de R, de dimension $D \geq 0$ et H_I la fonction de Hilbert de I. On a alors :

$$H_I(\nu) \leq \binom{\nu + D}{D} \deg I \qquad \forall\, \nu \in \mathbf{N}.$$

Ce résultat permet notament de construire des suites régulières de polynômes de $k[X_0, \dots, X_n]$ avec des éléments de l'idéal I ; citons les deux corollaires suivants que nous démontrerons plus loin :

(1) Sous les hypothèses du théorème, il existe une suite régulière $P_1, \dots, P_{n-D}$ de polynômes de I avec $\deg P_r \leq [((D+r)!/D!) \deg I]^{1/r}$.

(2) Dans le cas où I est premier G.R. de codimension deux, il existe P_1 et P_2 dans I sans facteur commun avec $\deg P_1 \deg P_2 \leq n(n-1) \deg I$.

Terminons cette introduction en énonçant une conjecture à propos de laquelle nous donnerons un résultat partiel à la fin de cet article :

Conjecture. — Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier G.R. homogène de codimension r de $k[X_0, \dots, X_n]$ et s un entier inférieur ou égal à r, il existe un idéal premier homogène $\mathfrak{Q}$, contenu dans $\mathfrak{P}$, dont la codimension est s et qui vérifie :

$$[\deg \mathfrak{Q}]^{1/s} \leq C_n [\deg \mathfrak{P}]^{1/r}$$

où C_n est une constante ne dépendant que de n.

1. Démonstration du théorème

a) Réductions.

Notons

$$A = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} A_\nu = k[x_0, \ldots, x_n] = k[X_0, \ldots, X_n]/I.$$

On remarque tout d'abord que la fonction de Hilbert est invariante par extension des scalaires. En effet : $\dim_k A_\nu = \dim_{\bar{k}} (A \otimes_k \bar{k})_\nu$ où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k. D'autre part l'idéal étendu I^e est également équidimensionnel ([Z-S 2], Ch. VII, § 11, theorem 36, corollary 1). La $\bar{k}$–algèbre $A \otimes_k \bar{k}$ est par hypothèse réduite.

Ces deux résultats font qu'il nous suffit de faire la démonstration dans le cas d'un corps algébriquement clos.

La réduction suivante consiste à se ramener au cas d'un idéal premier, pour cela il suffit de considérer l'injection canonique $k[X_0, \ldots, X_n]/I \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} k[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{P}_i$, où $\mathfrak{P}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_r$ est la décomposition primaire réduite de I. Les $\mathfrak{P}_i$ sont, d'après nos hypothèses, premiers et de même dimension.

Nous sommes ainsi ramenés au cas d'un idéal premier.

b) Le cas d'un idéal premier, avec corps de base algébriquement clos. Nous noterons $\mathfrak{P}$ l'idéal premier et :

$$A = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} A_\nu = k[x_0, \ldots, x_n] = k[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{P}.$$

Puisque k est algébriquement clos, donc parfait, le corps des fractions de A est séparablement engendré sur k ([Z-S 1], Ch. II, § 13, theorem 31). Le Lemme de Normalisation de E. Nœther ([Z-S 1], Ch. V, § 4, theorem 8) nous permet alors de supposer (modulo un changement linéaire de coordonnées) que :

(1) $x_0, \ldots, x_D$ sont algébriquement indépendants sur k ;

(2) $x_{D+1}, \ldots, x_n$ sont séparables sur $k(x_0, \ldots, x_D)$ et vérifient une relation de dépendance intégrale de la forme $Z^m + a_1 Z^{m-1} + \cdots + a_m = 0$ où les a_i sont des polynômes homogènes de degré i de $k[x_0, \ldots, x_D]$.

Fixons quelques notations :
$K^0 = k(x_0, \dots, x_D)$ est identifié à $k(X_0, \dots, X_D)$;
$A^0 = k[x_0, \dots, x_D]$ est identifié à $k[X_0, \dots, X_D]$;
$K = k(x_0, \dots, x_n)$;
$\tilde{K}$ est une clôture normale de K.

Si P est un polynôme homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ on pose :

$$\Psi_P = N_{K/K^0}\big(P(x_0, \dots, x_n)\big) \in k(X_0, \dots, X_D).$$

Si on note $\sigma_1, \dots, \sigma_\delta$ les différents plongements de K dans $\tilde{K}$, δ est égal au degré de $\mathfrak{P}$ (voir [M], Ch. 6, theorem 6.25, ou la remarque 1 à la fin de la démonstration) et

$$\begin{aligned}\Psi_P &= \prod_{i=1}^{\delta} \sigma_i\big(P(x_0, \dots, x_n)\big)\\ &= \prod_{i=1}^{\delta} P\big(x_0, \dots, x_D, \sigma_i(x_{D+1}), \dots, \sigma_i(x_n)\big).\end{aligned}$$

Les $\sigma_i(x_j)$ sont entiers sur $k[X_0, \dots, X_D]$ donc Ψ_P appartient à $k[X_0, \dots, X_D]$. Si ν est le degré de P, Ψ_P est homogène de degré $\nu\delta$.

Note. — D'un point de vue géométrique les $\sigma_i(x_0, \dots, x_n)$ sont les $\deg \mathfrak{P}$ points au dessus du point générique $(x_0, \dots, x_D)$ et Ψ_P est une équation de la projection sur $\mathbf{P}^D$ de la variété définie par l'idéal $(\mathfrak{P}, P)$.

Notons $\tilde{A} = A^0[\sigma_j(x_i)]_{\{i=D+1,\dots,n;j=1,\dots,\delta\}}$; $\tilde{A}$ est entier sur A^0, de corps des fractions $\tilde{K}$.

On considère les opérateurs de "dérivation divisée" D^Λ (voir l'appendice pour leur définition et leurs propriétés), d'après la Proposition 1 de l'appendice ils s'étendent de manière unique à $\tilde{K}$ car $\tilde{K}$ est séparable et finie sur K^0 ; nous noterons de la même manière ces opérateurs étendus.

Si $P_i \in A^0[Z]$ est le polynôme minimal de x_i $(i = D+1, \dots, n)$; posons

$$\Delta_i = \prod_{s=1}^{\delta} \frac{\partial P_i}{\partial Z}\big(\sigma_s(x_i)\big) \in A^0.$$

D'après la remarque 2 de l'appendice $[(\partial P_i/\partial Z)(\sigma_s(x_i))]^{|\Lambda|}\, D^\Lambda(\sigma_s(x_i))$ appartient à $\tilde{A}$. Donc $\Delta_i^{|\Lambda|} D^\Lambda(\sigma_s(x_i))$ est dans $\tilde{A}$, et ainsi l'anneau $\tilde{A}[\Delta^{-1}]$, où $\Delta = \Delta_{D+1} \cdots \Delta_n$, est stable sous l'action des opérateurs D^Λ.